Kunst und Mathematik
Übung, SJ 2010/11

Prof. Dr. Christina Birkenhake

email: chbi@thb65.de
http://www.thuisbrunn65.de/

10. Mai 2011

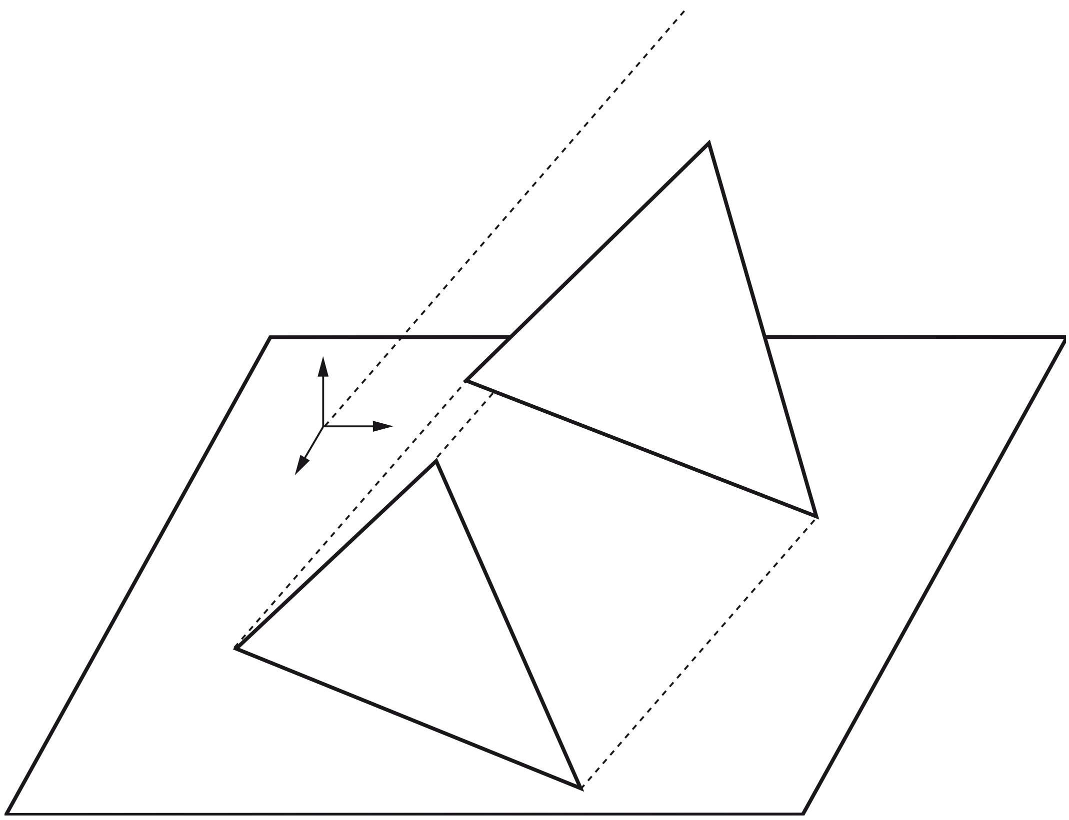
Kap.1: Was ist Perspektive - Einführung

Ziel: ebene Darstellung räumlicher Objekte $\Rightarrow$ Projektion

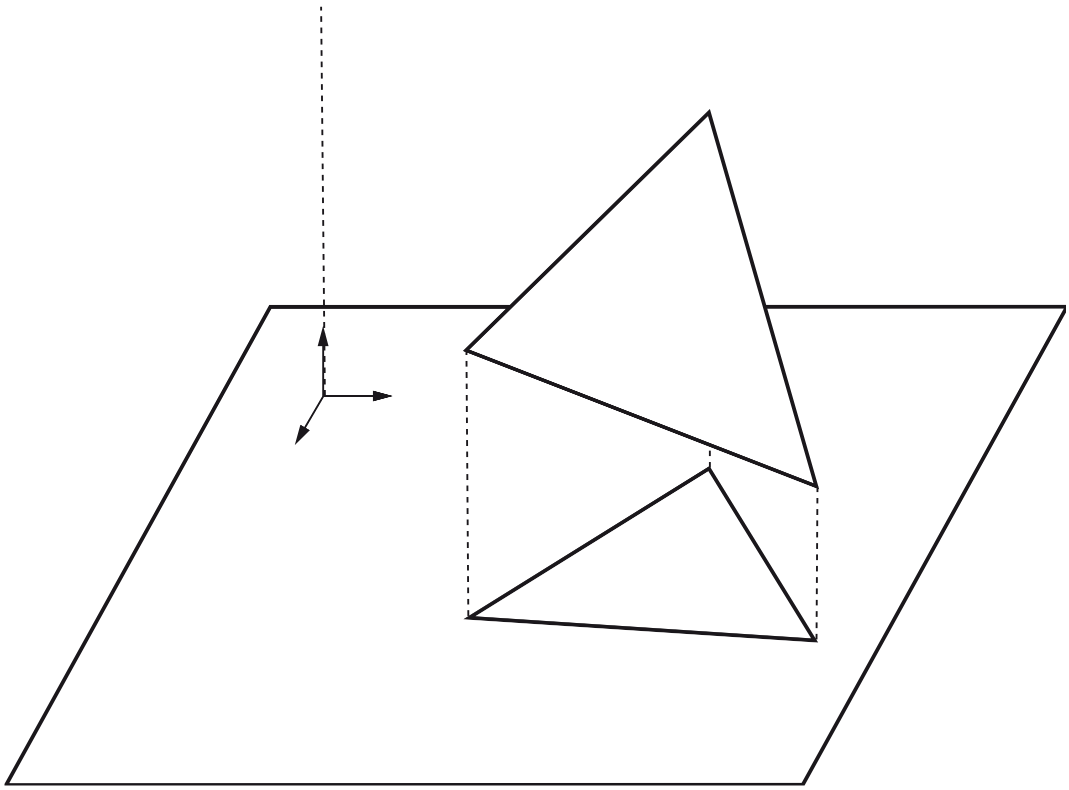
Projektionsarten:

- Parallelprojektionen
  - schräge Parallelprojektion
  - Normalprojektion
- Zentralprojektion

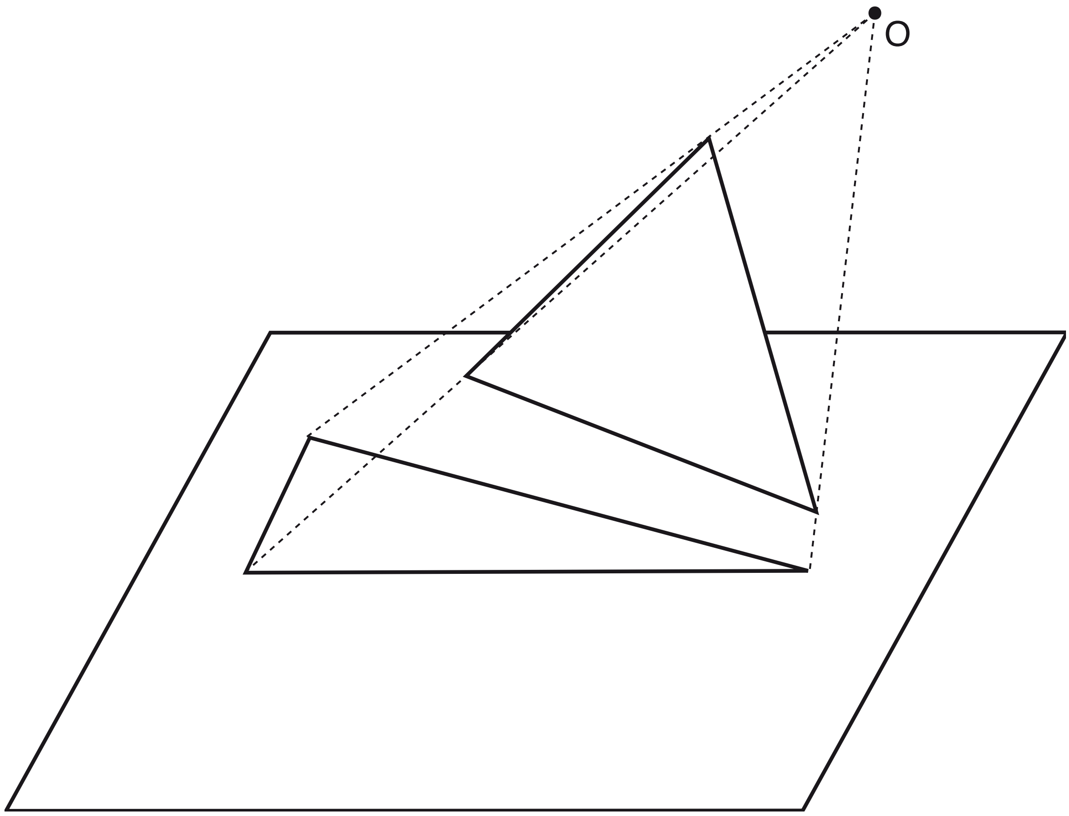
Schräge Parallelprojektion



Normalprojektion



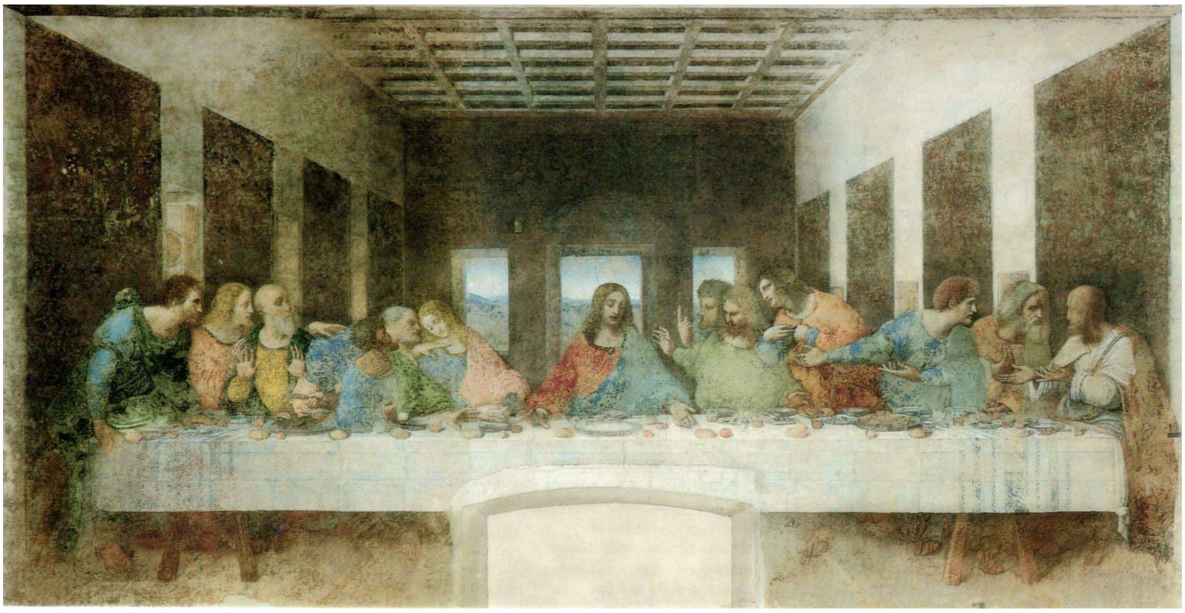
Zentralprojektion



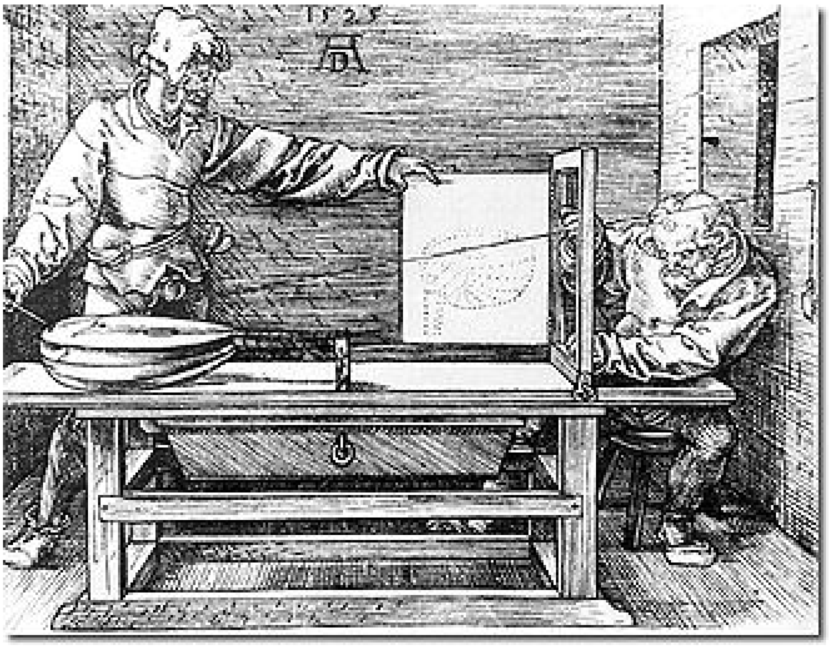
Perspektive $\Rightarrow$ Zentralprojektion

- Erste Lösungen von Künstlern und Baumeistern der Renaissance
- Renaissance: Begriff, um das kulturelle Aufleben der griechischen und römischen Antike im Europa des 14. bis 17. Jahrhunderts zu beschreiben. Anfänge: spätes 14. Jh., Kernzeit: 15. und 16. Jh.
- Namen:
  - Giotto (1266-1337)
  - Filippo Brunelleschi (1377-1446): Erbauer der Domkuppel in Florenz
  - Leon Battista Alberti (1404-1472)
  - z. B: Leonardo da Vinci: Das Abendmahl ▸ Bild
  - Albrecht Dürer (1471-1528): erste mathematisch-geometrische Beschreibung der Perspektive (Underweysung der messung mit dem zirkel un richtscheyt) ▸ Bild

Leonardo da Vinci: Das Abendmahl



Zentralprojektion

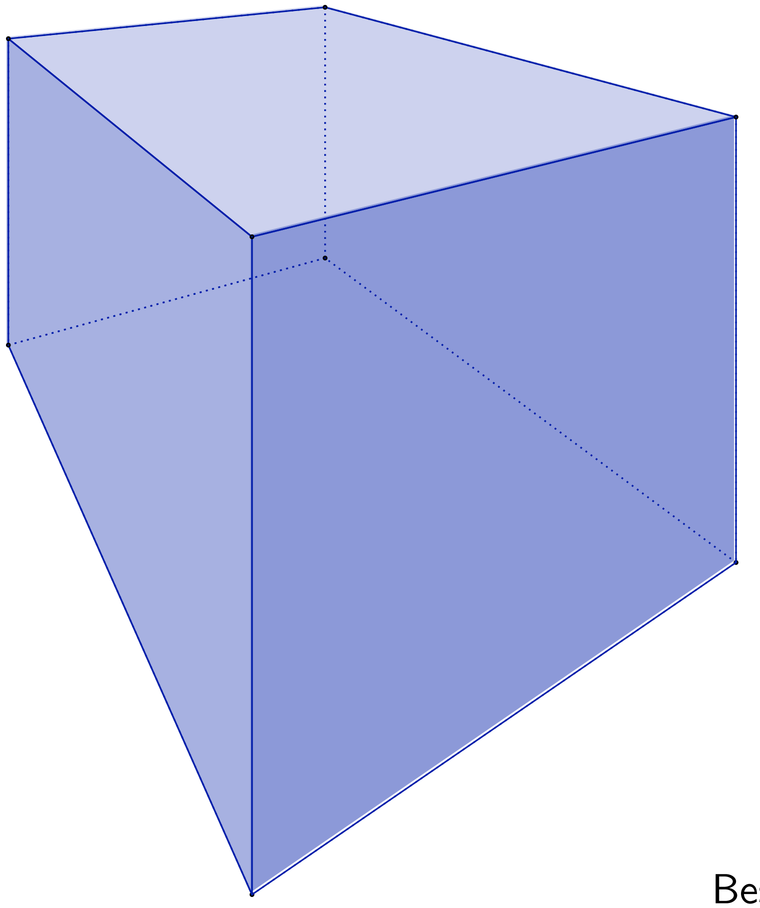

Albrecht Dürer (1471-1528)

Bedeutung der Perspektive

Die Kunst, Gegenstände so in einer Ebene abzubilden, daß sie auf das Auge den gleichen Eindruck machen wie der Gegenstand selber von einem bestimmten Standpunkt aus.[1]

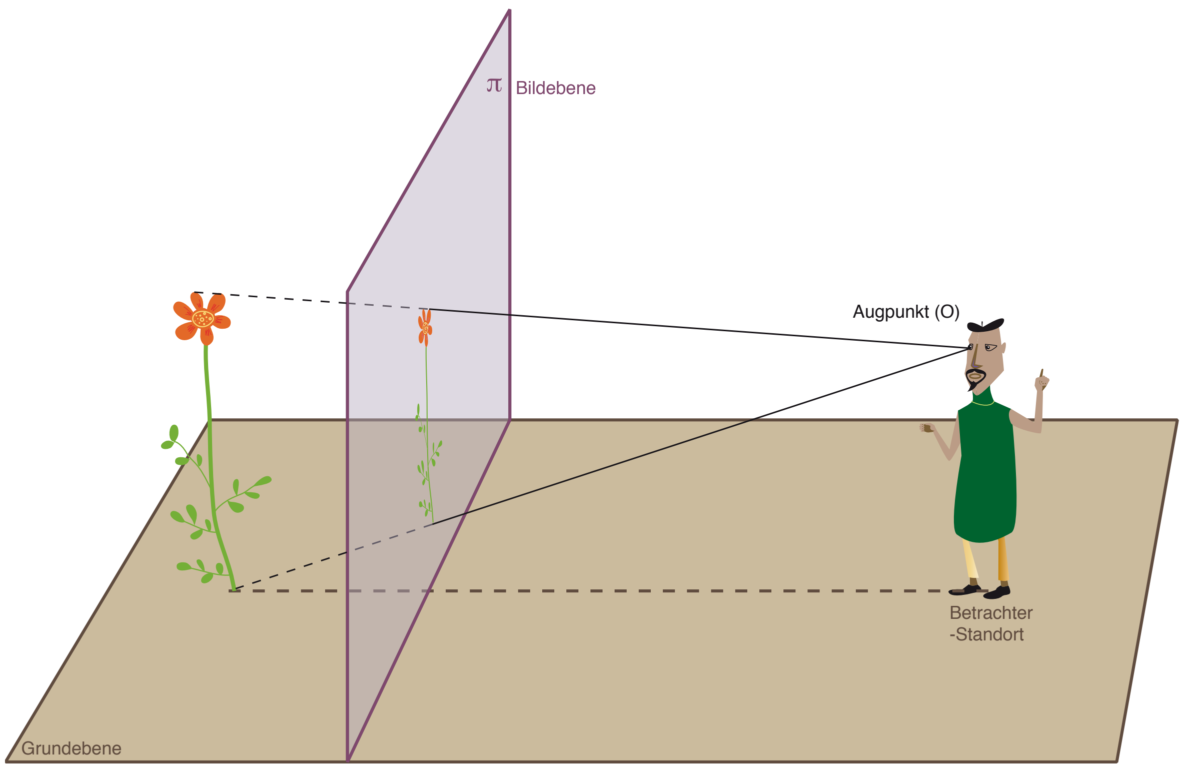
[1] [Großes Wörterbuch der niederländischen Sprache:]

Würfel in perspektivischer Darstellung

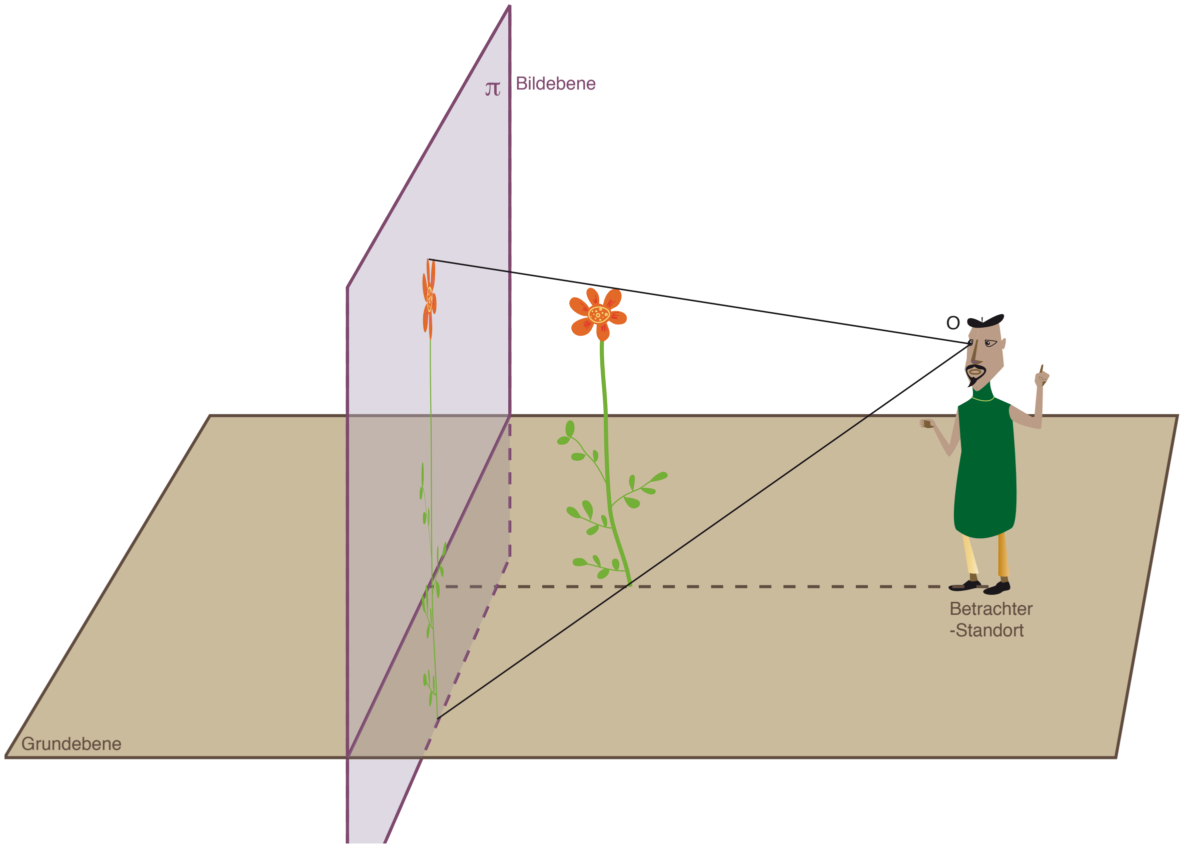


Bestimme die Distanz.

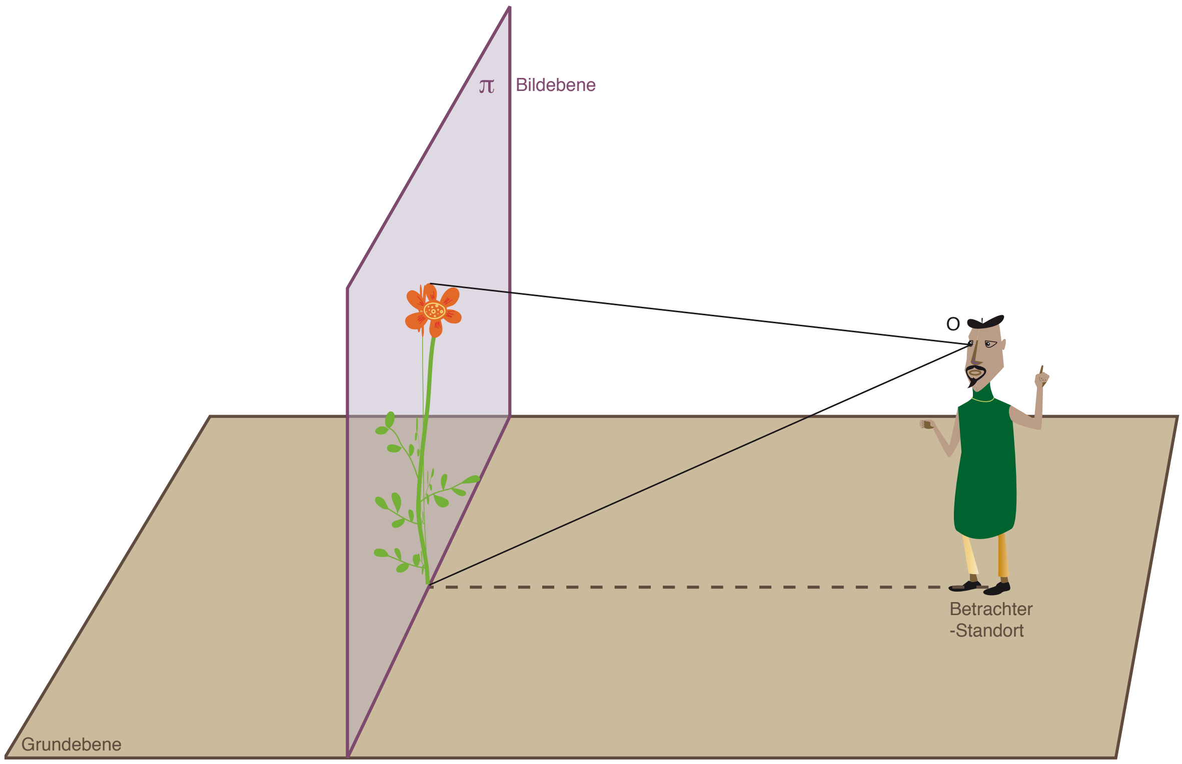
Position: Gegenstand - Bild - Betrachter



Position: Bild - Gegenstand - Betrachter



Position: Gegenstand / Bild - Betrachter

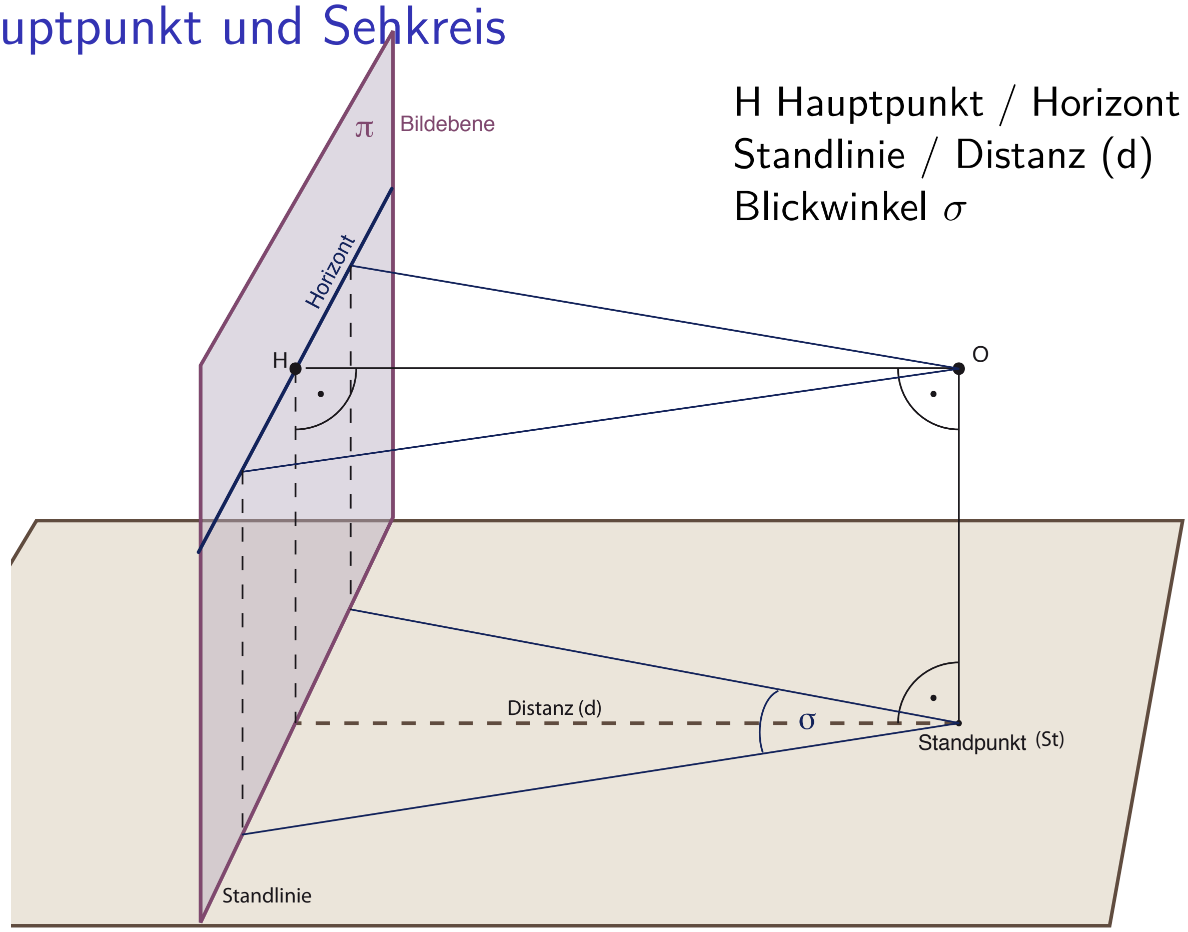


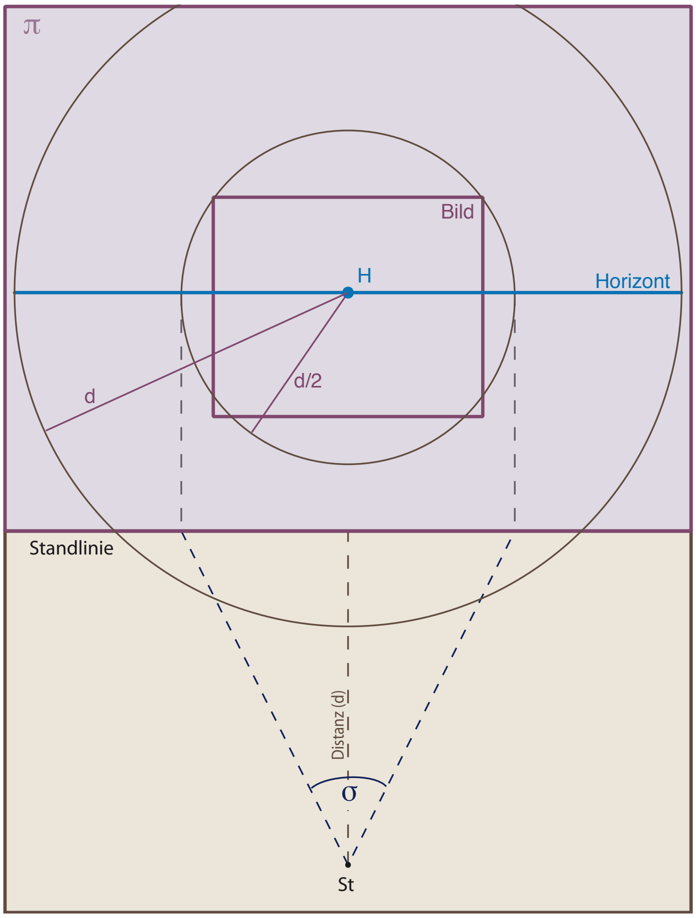
Grundbegriffe I

- Grundebene
- Betrachter, steht auf Grundebene (horizontale Ebene),
- Augpunkt O (obwohl wir mit zwei Augen sehen, gehen wir in der Perspektive von einäugigem Sehen aus),
- Bildebene π (bei uns immer vertikal),
- Verschwindungsebene: parallele Ebene zu π durch O.
- Abzubildender Gegenstand, mögliche Positionen:
  - Gegenstand hinter Bildebene: Bild kleiner als Original,
  - Gegenstand vor Bildebene: Bild größer als Original,
  - Gegenstand auf Bildebene: Bild und Original gleich groß.
- Sehstrahlen: Strahl von Augpunkt durch Punkt auf Gegenstand $\Rightarrow$ Bildpunkt ist der Schnittpunkt des Sehstrahls mit der Bildebene π.
- Zu jedem Punkt eines Gegenstandes (ausserhalb der Verschwindungsebene) gehört ein Sehstrahl und ein Bildpunkt!

Hauptpunkt und Sehkreis

H Hauptpunkt / Horizont
Standlinie / Distanz (d)
Blickwinkel σ





Umgeklappte Grundebene:

H $\in$ Horizont

Standlinie / Distanz (d)

Richtwerte:

Blickwinkel: $\sigma \approx 60°$

Sehkreis: Radius $\frac{d}{2}$

Distanzkreis: Radius d

- Hauptpunkt (H)
  Bildpunkt des Hauptsehstrahls, der von O senkrecht auf π zeigt.
- Horizont: horizontale Gerade durch H in π
- Blickwinkel der Augen: $\sigma \leq 60°$
- Sehkreis $r_S = \frac{d}{2}$
- Distanzkreis $r_D = d$
- Standlinie: Schnittgerade von Grundebene und π

Würfel mit variabler Perspektive

Frosch-, Vogel- und Normalperspektive
Blickwinkel σ variabel
Bewege H und St

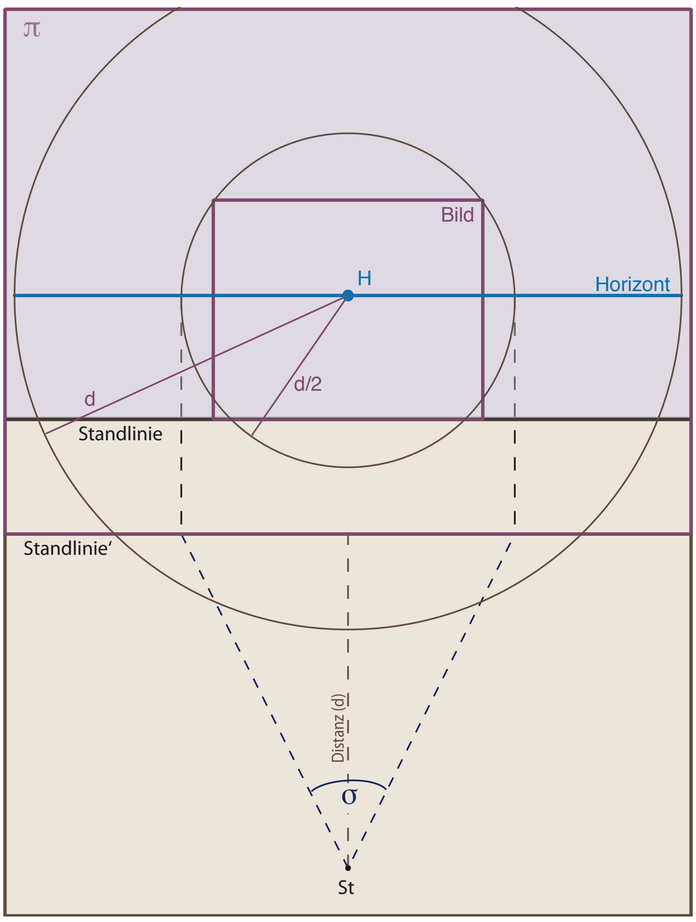
Tipps zum Umgang mit Geogebra

1. Startbildschirm anfertigen.
2. Zusammengehörige Konstruktionsobjekte in gleicher Farbe: z.B Hilfslinien und Hilfspunkte $\Rightarrow$ grau, Winkelmessung $\Rightarrow$ grün, etc..
3. Nicht mehr gebrauchte Hilfslinien z.B. mittels Kontrollkästchen unsichtbar machen.
4. Immer ähnliche Bezeichnungen und Farben erleichtern das Leben.
5. Bei mir : X_0 ist der bewegliche Fluchtpunkt entlang einer Fluchtline bei vorgegebenem Winkel, Y_0 durch X_0 festgelegt.
6. Ständig speichern.
7. Ständig aufraümen (Farbe, Kontrollkästchen, unsichtbar machen, etc.

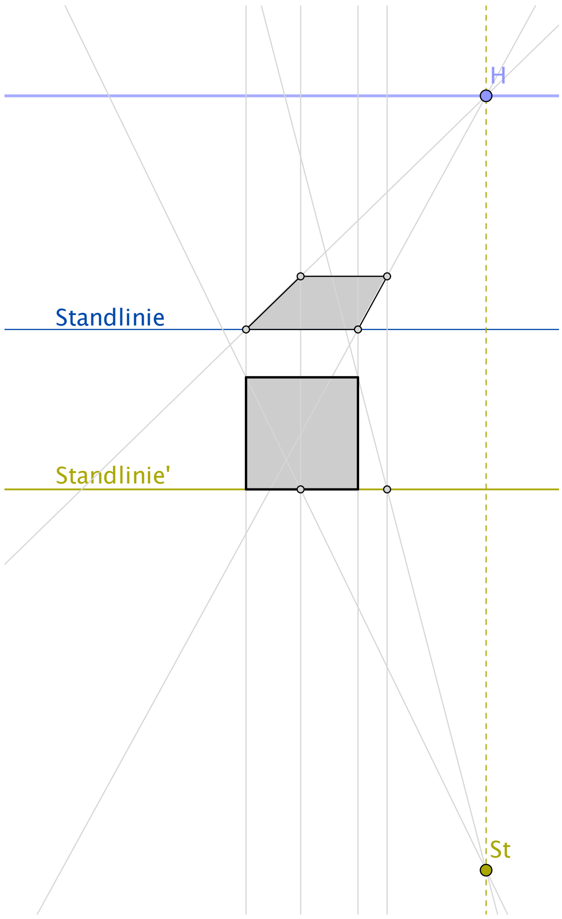
Aufgaben

1. Konstruiere das perspektivische Bild eines Schachbrettes.
2. Zeichne einen Würfel in Frontansicht: eine Seite $\parallel \pi$

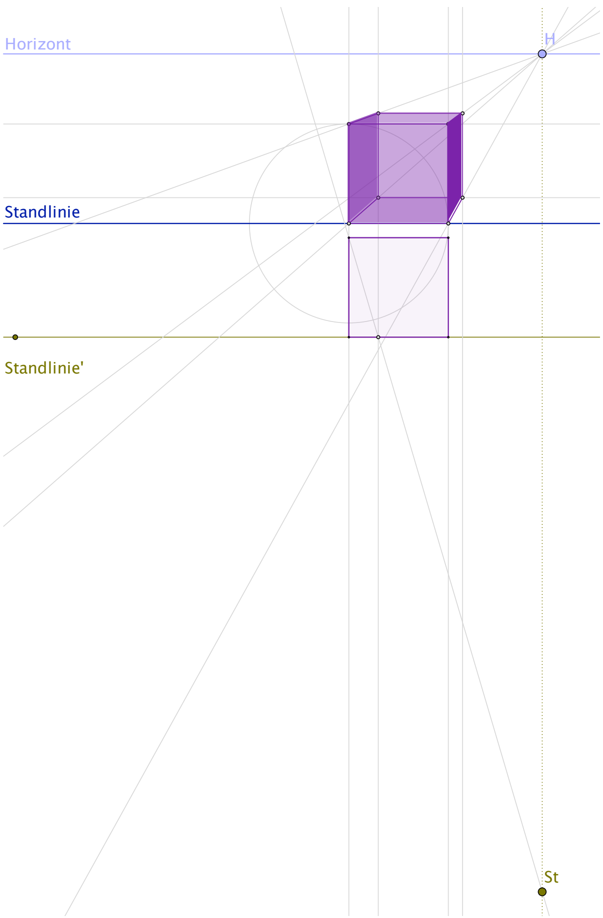
Kap.2: Grundrisskonstruktion



Verschobene Bildebene



Konstruktion einer ebenen Figur aus einem Grundriss



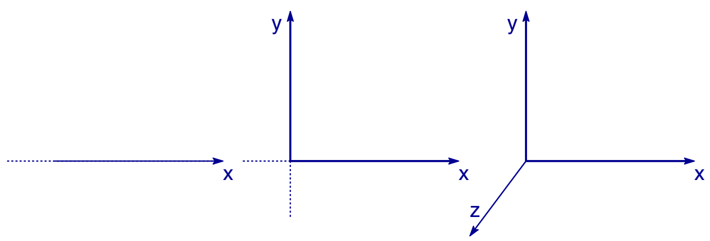
Konstruktion einer räumlichen Figur aus ihrem Grundriss

Kap.3: Zentralprojektion - Theorie

Zum Zeichnen dreidimensionaler Objekte in einer Ebene benötigt man ein Verständnis von Perspektive, der künstleischen Inkarnation einer mathematischen Disziplin, der projektiven Geometrie.[2]

[2] [Das Zebra-Buch zur Geometrie, Springer-Lehrbuch, p.101]

Euklidische Koordinatensysteme

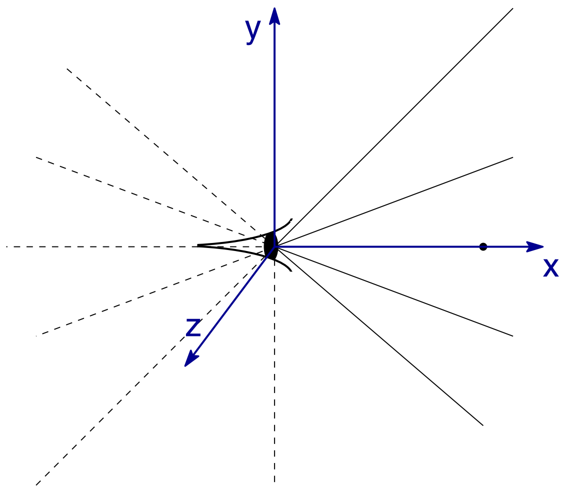


- Zahlenstrahl, eine Dimension $\mathbb{R}$
- xy-Koordinatensystem, zwei Dimensionen $\mathbb{R}^2$
- xyz-Koordinatensystem, drei Dimensionen $\mathbb{R}^3$

Zentralprojektion, Wdh.

- Lege einen Augpunkt fest (durch den Standort);
- ersetze die Punkte des darzustellenden Objektes durch Sehstrahlen (Projektivisierung)
- Schneide die Sehstrahlen mit Bildebene π,
  $\Rightarrow$ Schnittpunkte = Bildpunkte/Spurpunkte.
- Hier gehen Informationen verloren $\Rightarrow$ Tribar, Falsche Perspektive im Web

Projektivisierung



Augpunkt O
Bildpunkt $\Rightarrow$ Sehstrahl/Gerade
Ganzer Raum $\Rightarrow$ alle Geraden durch unser Auge

Raum: xyz-Koordinatensystem $\mathbf{R}^3$
Punkte $\Rightarrow$ Ursprungsgeraden

Projektive Ebene: $\mathbb{P}^2 = \{\text{alle Geraden durch } 0 \text{ in } \mathbb{R}^3\}$

Neue, nichteuklidische Geometrie!!

Projektive Räum gibt es in alles Dimensionen:

Projektive Ebene

$$\mathbb{P}^2 = \text{Geraden durch 0 in } \mathbb{R}^3$$

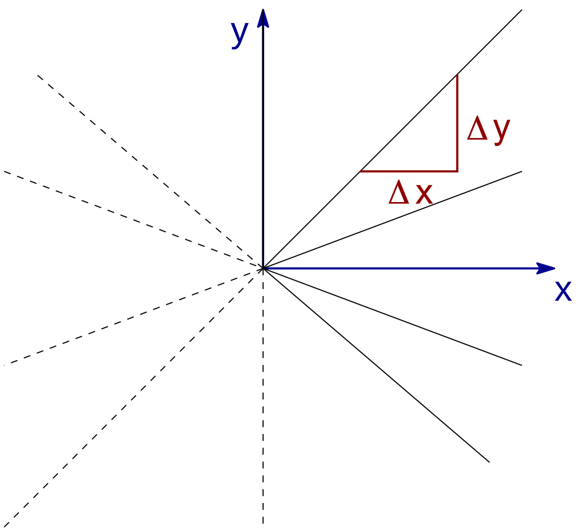
Projektiver n-dimensionaler Raum

$$\mathbb{P}^n = \text{Geraden durch 0 in } \mathbb{R}^n$$

speziell: Projektive Gerade

$$\mathbb{P}^1 = \text{Geraden durch 0 in } \mathbb{R}^2$$

Projektive Gerade



$\mathbb{P}^1 = \text{Geraden durch 0 in } \mathbb{R}^2$
Gerade eindeutig durch ihre Steigung representiert
$\Rightarrow$ Einbettung:

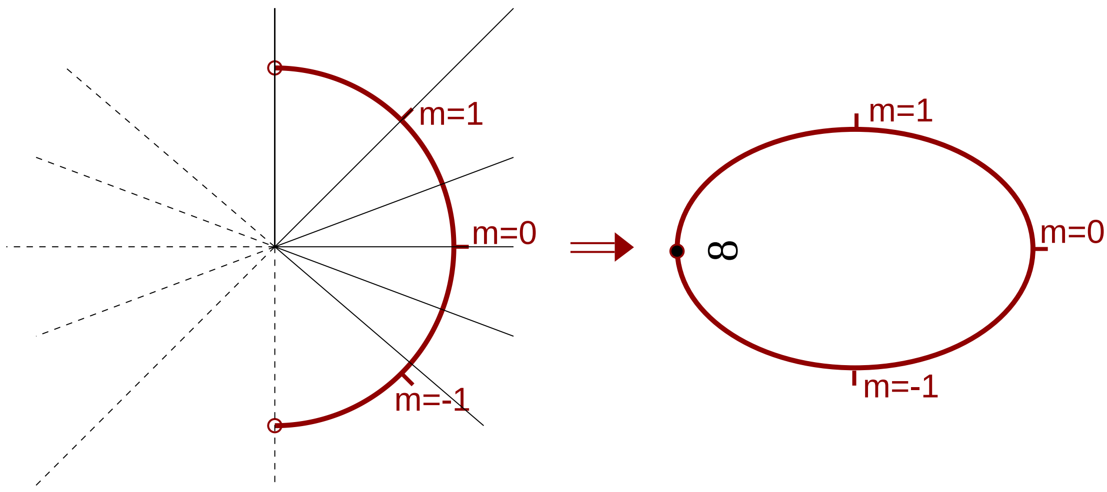
$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \mapsto$ Gerade mit Steigung m

Eine Gerade fehlt:
y-Achse $\simeq$ Steigung ∞

$$\mathbb{R} \cup \infty = \mathbb{P}^1$$

Die projektive Gerade ist kompakt



$$\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \infty \cup \mathbb{R} = \mathbb{P}^1$$

Homogene Koordinaten

Die Steigung einer Geraden ist ein Verhältnis von Seiten eines Dreiecks.

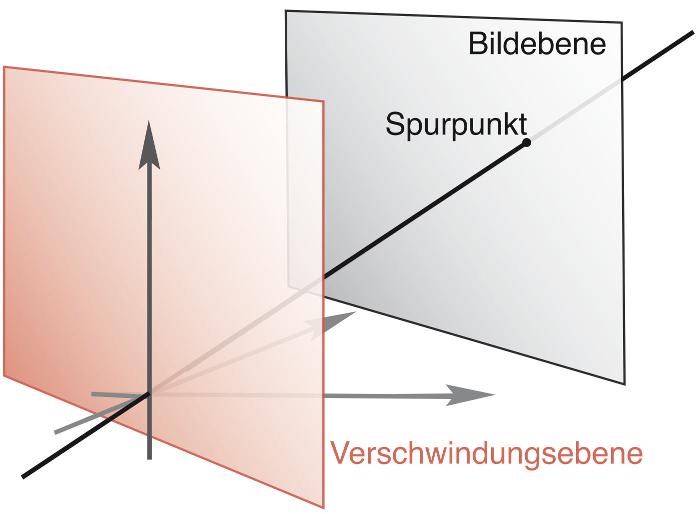
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} & \mapsto & (\Delta x : \Delta y) = (\alpha \Delta x : \alpha \Delta y) = (1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}) \end{array}$$

Und so rechnet man:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \cup \infty & \simeq & \mathbb{P}^1 \\ x & \leftrightarrow & (1 : x) \\ \infty & \leftrightarrow & (0 : 1) \\ \frac{x_1}{x_0} & \leftarrow & (x_0 : x_1) \end{array}$$

Kap.4: Fluchtpunkte und Fluchtgeraden

Bildebene und Verschwindungsebene



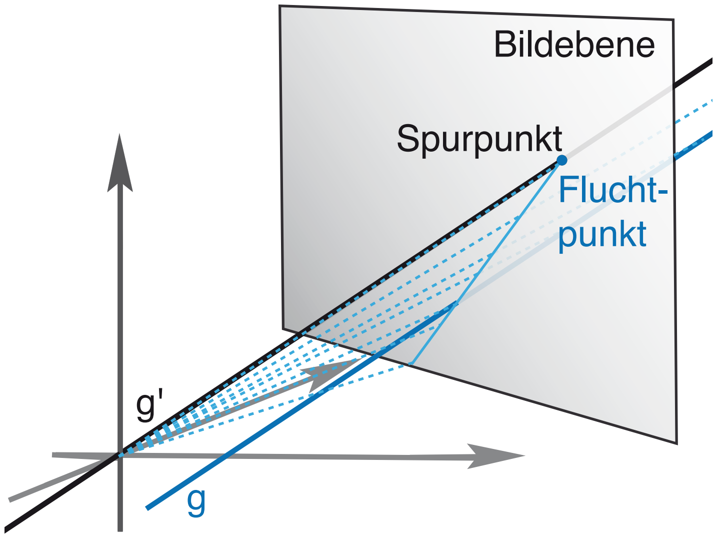
Bildebene π

Verschwindungsebene $\parallel \pi$
$O \in$ Verschwindungsebene

Geraden durch O $\Rightarrow$ Spurpunkt

Punkte in der Verschwindungsebene haben keinen Bildpunkt!

Fluchtpunkt einer Geraden

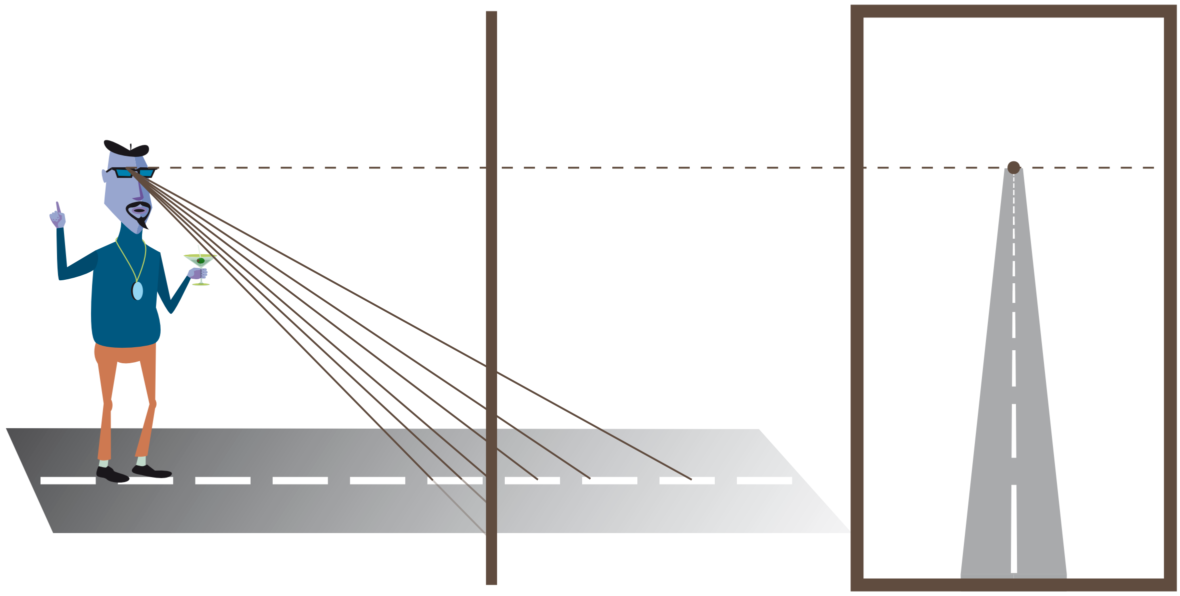


beliebige Gerade g
$\Rightarrow$ Spurgerade g': die parallele Gerade durch O
$\Rightarrow$ Spurpunkt $g' \cap \pi$

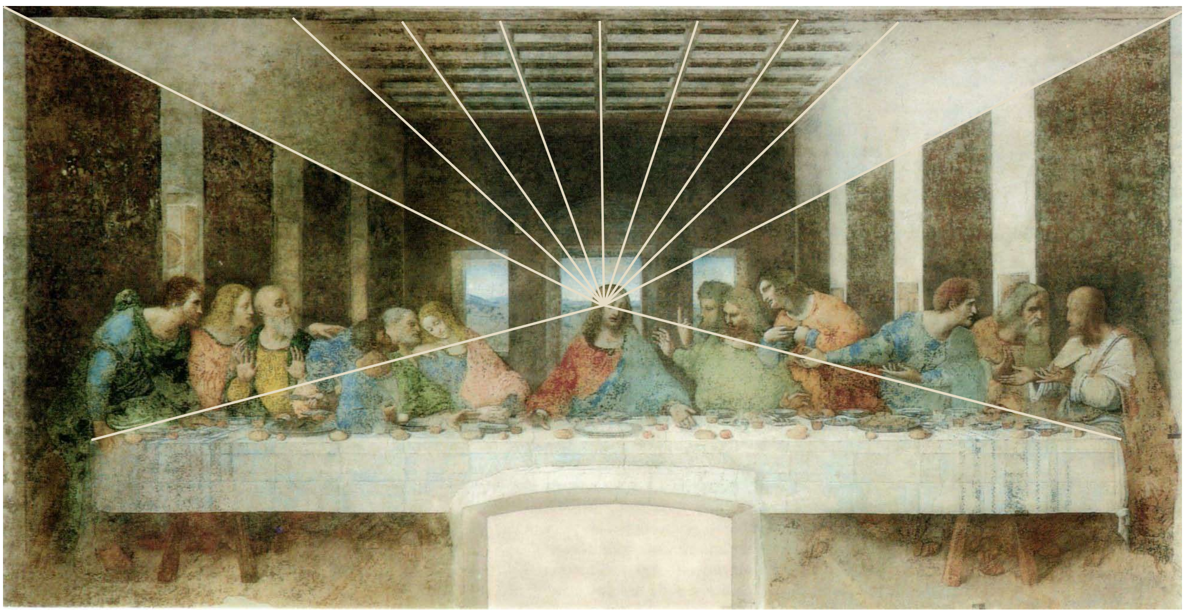
Spurpunkte der Sehstrahlen aller Punkte von g $\Rightarrow$ Strahl $\subset \pi$.

Der Spurpunkt von g' ist der Endpunkt $\Rightarrow$ *Fluchtpunkt* von g.

Fluchtpunkt einer Geraden

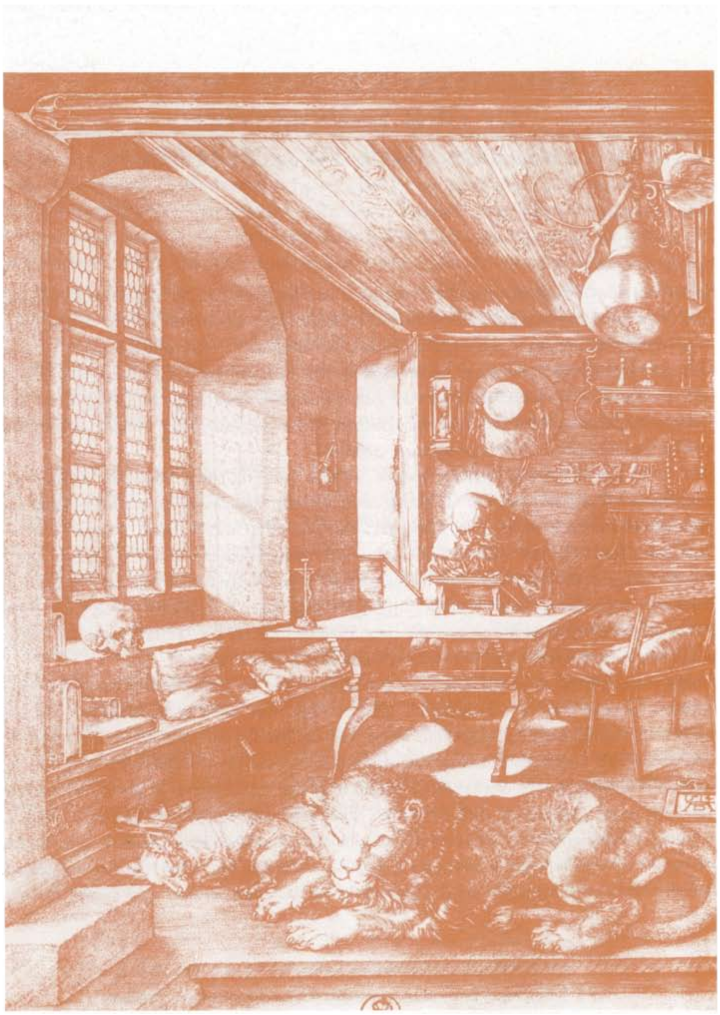


Leonardo da Vinci: Das Abendmahl



Fluchtpunkt - Regeln

- Das Bild einer Geraden g (nicht in die Verschwindungsebene) hat einen Fluchtpunkt. Dieser ist der Spurpunkt der Spurgerade g' (des zu der Geraden parallelen Sehstrahls).
- Jeder Punkt in π ist ein Fluchtpunkt.
- Bilder paralleler Geraden im Raum haben denselben Fluchtpunkt.
- Der Hauptpunkt H ist der Fluchtpunkt der Tiefenlinien.
  Tiefenlinien sind die Geraden senkrecht zu π
- Der Horizont ist die Fluchtgerade aller horizontaler Ebenen.
- Eine Ebene E ($\neq$ Verschwindungsebene) hat eine Fluchtgerade g_E.
- Die Gerade g ist genau dann parallel zu (oder liegt auf) E, wenn ihr Fluchtpunkt auf g_E liegt.
- Jede Gerade in π ist die Fluchtgerade einer Ebene.



Rekonstruiere den Hauptpunkt!

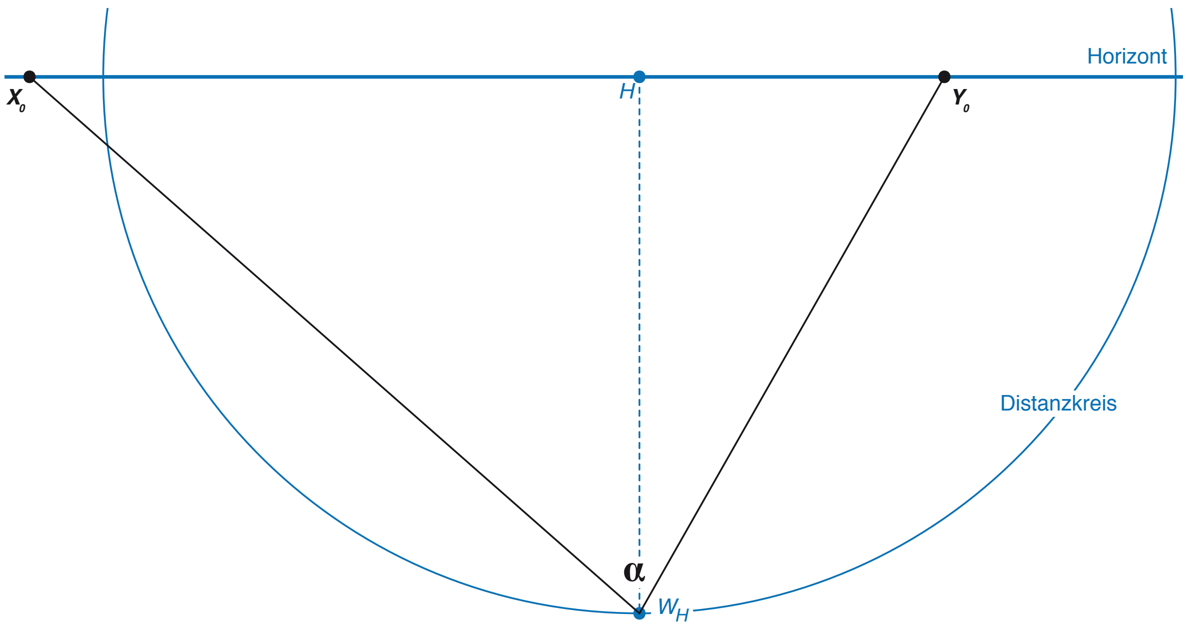
Kann man noch mehr rekonstruieren?

Hieronymus im Gehäuse
Albrecht Dürer,
Kupferstich 1514

Aufgaben

1. Konstruiere mit Hilfe der Grundrißkonstruktion das perspektivische Bild eines Sechsecks.
2. Konstruiere mit Hilfe der Grundrißkonstruktion das perspektivische Bild aus einem beliebigen Grundriß.
3. Zeichne einen Strand mit vielen Sonnenschirmen Sonnenschirmen gleicher Höhe.

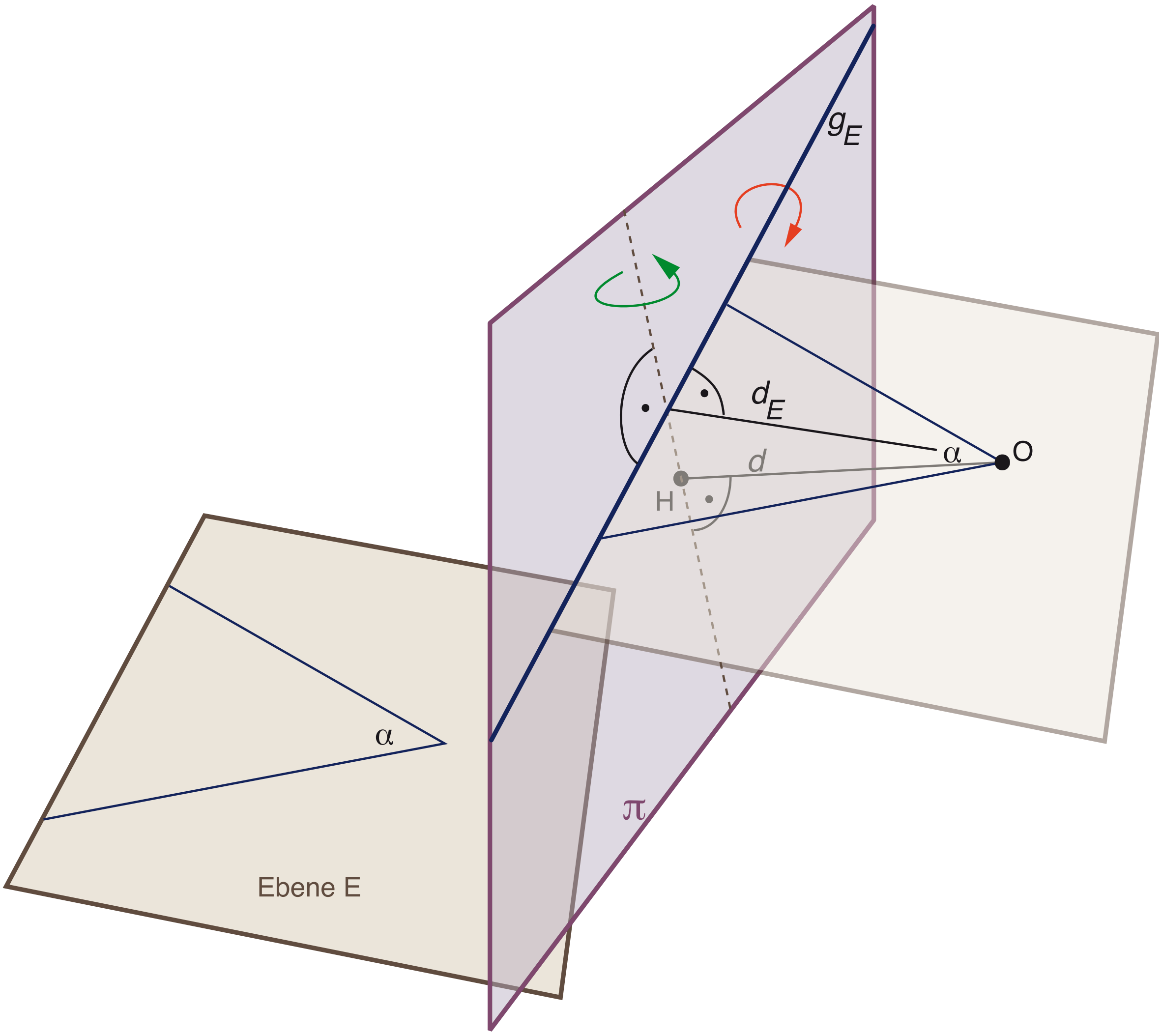
Kap. 5: Winkelmessung und -konstruktion



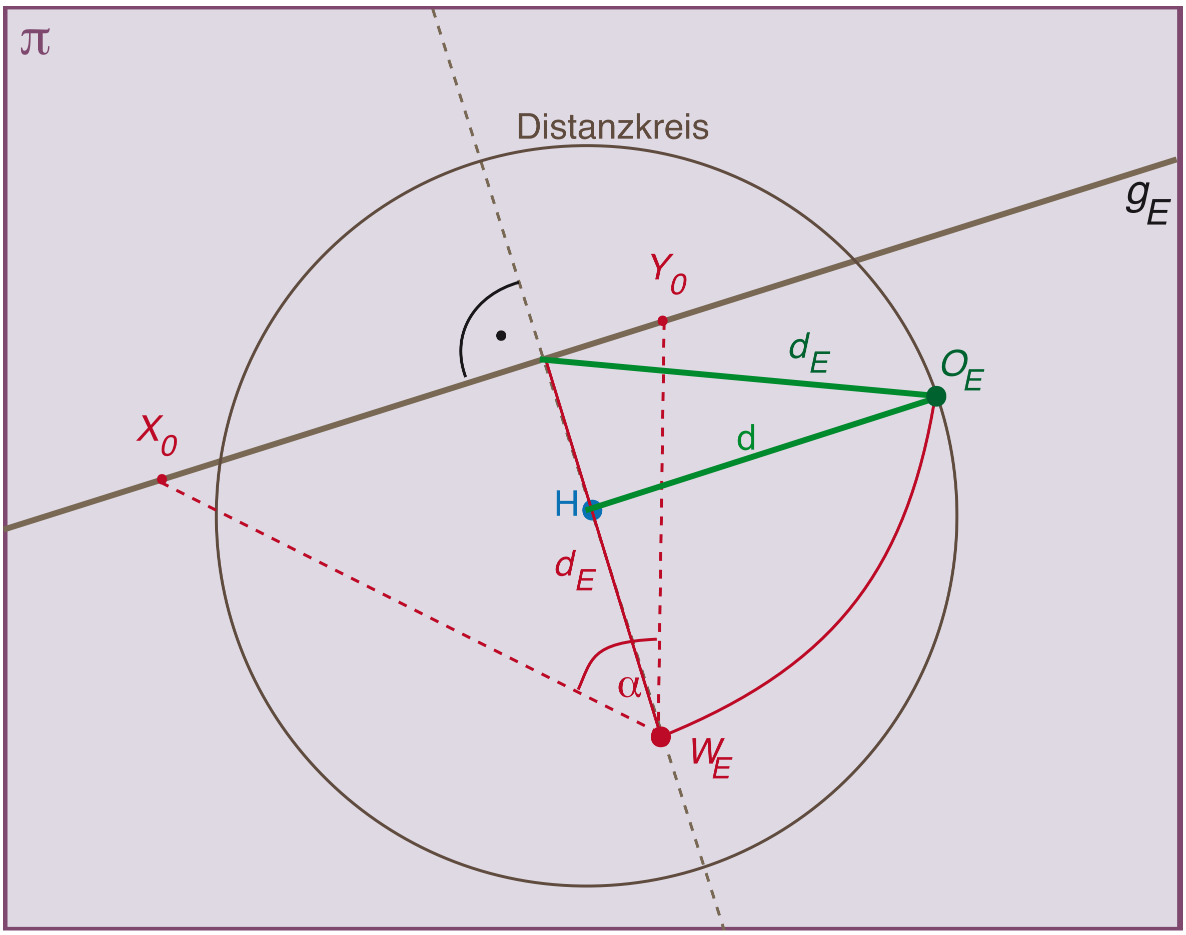
W_H: Winkelmeßpunkt aller horizontaler Winkel, senkrecht unter (oder über) H , $\overline{HW_H} = d$

X_0 und Y_0: Fluchtpunkte horizontaler Geraden mit Winkel α

Cabri: Quadrat Geogebra: Winkel Geogebra: Stern

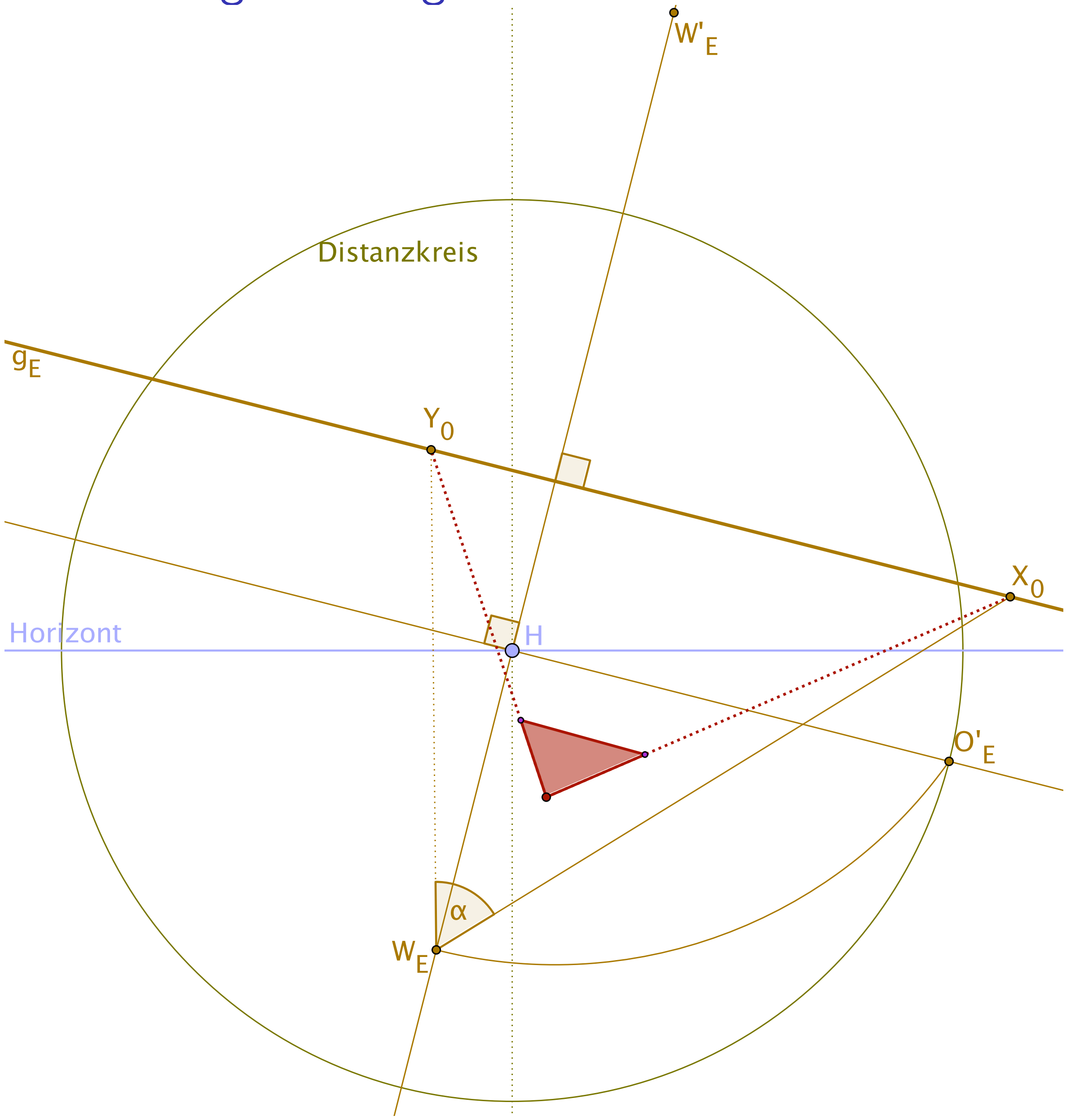


g_E
d_E
α
O
d
H
α
π
Ebene E



π
Distanzkreis
g_E
Y_0
d_E
O_E
X_0
d
H
d_E
α
W_E

Winkelmessung - beliebige Ebene E



g_E Fluchtlinie einer Ebene E

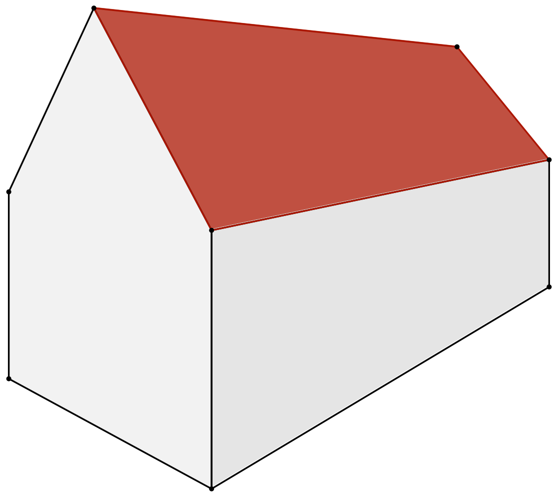
$W = W_E$: Winkelmesspunkte der Ebene E, auf Senkrechter zu G_E durch H mit $\overline{HW_E} = d$

X_0 und Y_0: Fluchtpunkte von Geraden in E mit Winkel α

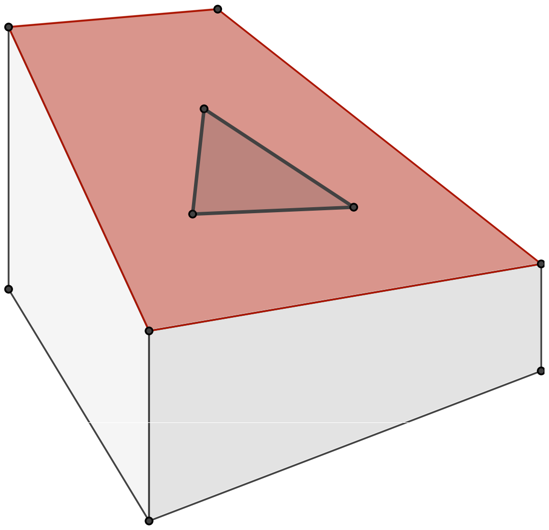
Dreieck: das perspektivische Bild eines Dreiecks in der Ebene E mit Winkel α.

Geogebra: Winkel in beliebiger Ebene

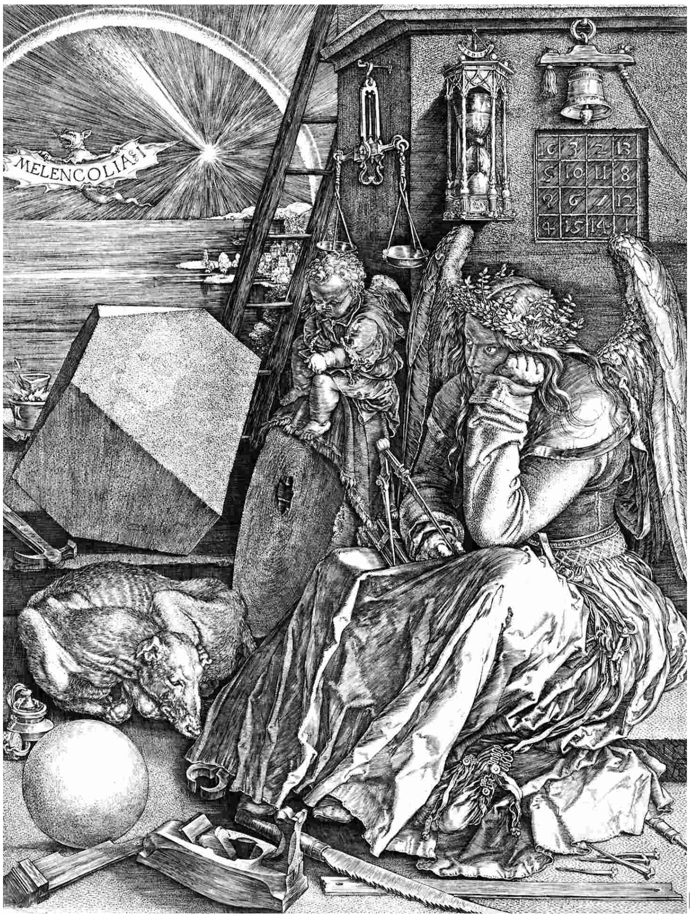
Winkel in beliebigen Ebenen



Haus mit Schrägdach in Eckansicht



Dreieck auf Pultdach



Melencolia Albrecht Dürer, Kupferstich 1514

Dürer-Polyeder: Rhomboederstumpf

[Wikipedia: Rhomboederstumpf]

Der Rhomboederstumpf ist ein konvexes, achtflächiges Polyeder. Es setzt sich aus sechs gleichen, unregelmäßigen, aber achsensymmetrischen Fünfecken und zwei gleichseitigen Dreiecken zusammen. Er hat zwölf Ecken; an jeder Ecke treffen drei Flächen aufeinander (ein Dreieck und zwei Fünfecke oder drei Fünfecke). Sämtliche Eckpunkte liegen auf derselben Umkugel. Gegenüberliegende Flächen sind parallel. Im Stich steht der Körper auf einer Dreiecksfläche, die Fünfecke bilden quasi die Mantelfläche. Die Kantenanzahl beträgt achtzehn.

Konstruktion:

Der Ursprungskörper ist ein sechsflächiges Rhomboeder, das zugleich Parallelepiped und schiefes Prisma ist. Er besteht aus sechs Rauten mit der Kantenlänge a und den charakteristischen Winkeln 72° und 108°. Sechs seiner acht Ecken liegen auf einer gemeinsamen Umkugel, die beiden Spitzen ragen darüber hinaus. Durch Abschneiden der Spitzen in der richtigen Höhe entstehen jeweils drei neue Ecken, die die dreieckigen Seiten des Rhomboederstumpfs bilden und die ebenfalls auf der gemeinsamen Umkugel liegen. Wie üblich stehen die Schnittflächen senkrecht auf der Höhenlinie des Körpers.

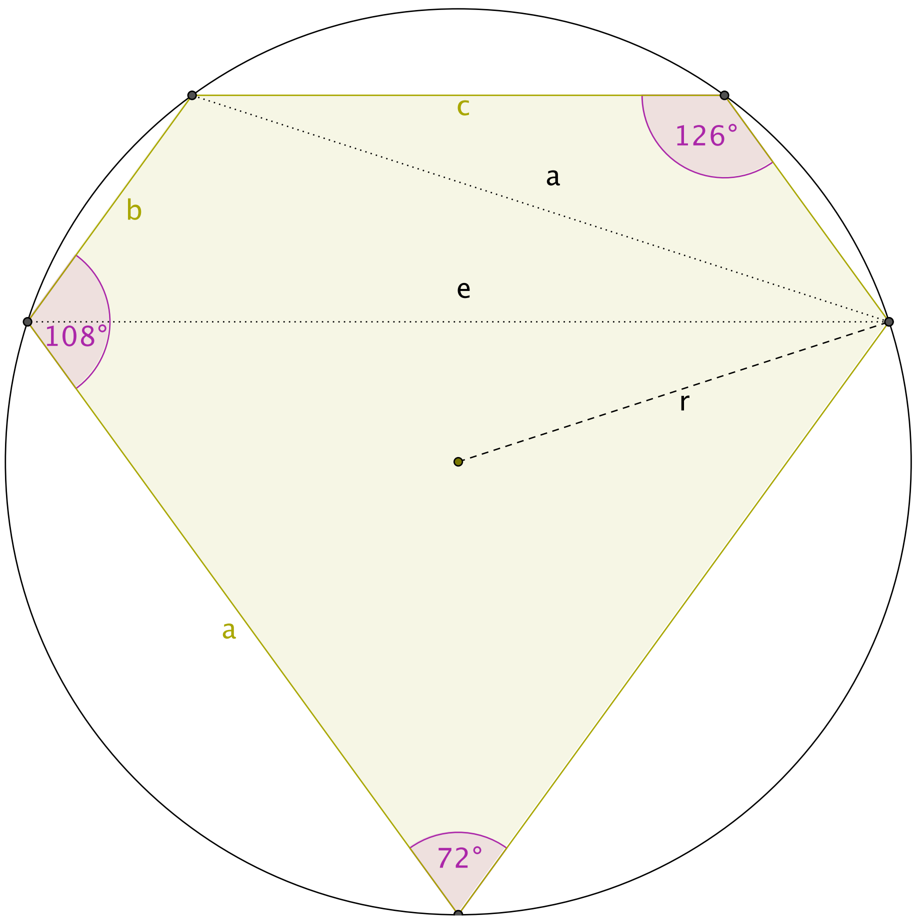
Fünfeckige Seitenflächen: Durch das Abschneiden werden die Rauten zu den fünfeckigen Begrenzungsflächen des Rhomboederstumpfs, jeweils zwei der Rauten-Seiten a bleiben mit dem eingeschloßenen Winkel von 72° erhalten, die beiden anderen Seiten verkürzen sich auf b , die Schnittlinie c verläuft parallel zur Diagonale e. Die beiden neu hinzugekommenen stumpfen Winkel betragen jeweils 126°. Insbesondere sind a und b parallel und alle fünf Ecken liegen auf einem Umkreis und enthalten somit drei verschiedene Sehnenvierecke (sowie zwei Spiegelungen). Durch diese spezielle Wahl der Winkel bei den Rauten entstehen mehrere bemerkenswerte Verhältnisse in den fünfeckigen Seitenflächen des Rhomboederstumpfs. Dabei ist r der Umkreisradius des Fünfecks:

Folgende Längenverhältnisse stehen im goldenen Schnitt:
$\frac{a}{r} = \frac{r}{b} = \frac{e}{c} = \varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

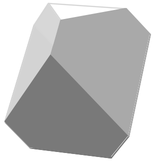
r ist zugleich Differenz und geometrisches Mittel aus a und b:
$\sqrt{ab} = a - b = r.$

Die beiden Nebendiagonalen, die jeweils mit b und c ein Dreieck bilden, haben exakt die Länge a. Zusammen mit den sonstigen Kanten ergeben sie jeweils ein spiegelsymmetrisches Trapez, dessen Spiegelachse aber nicht mit der des Fünfecks übereinstimmt.

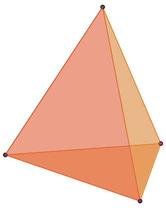
Sehnenfünfeck



Polyeder



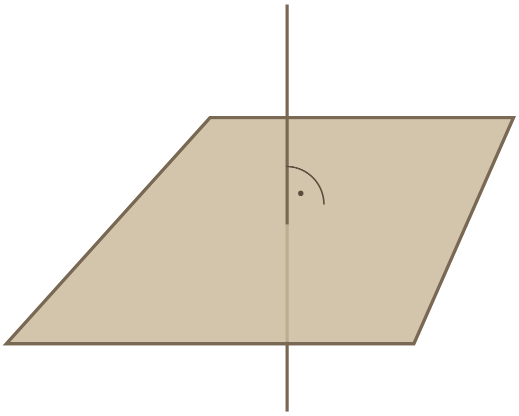
Zur Konstruktion des Dürer Polyeders braucht man Winkel- und Streckenmessung.

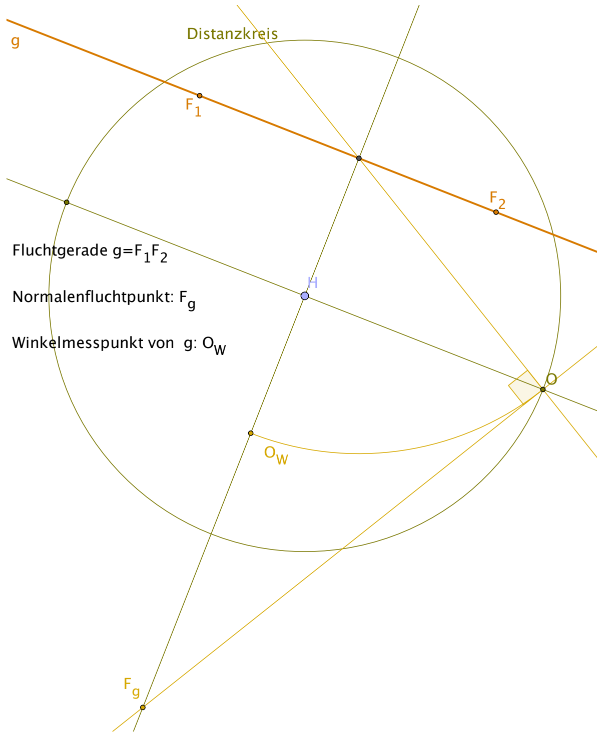


Die Konstruktion eines Tetraeders ist dagegen vergleichsweise einfach.

Kap.6: Ebenen und Normalen
Fluchtdreieck eines Achsenkreuzes

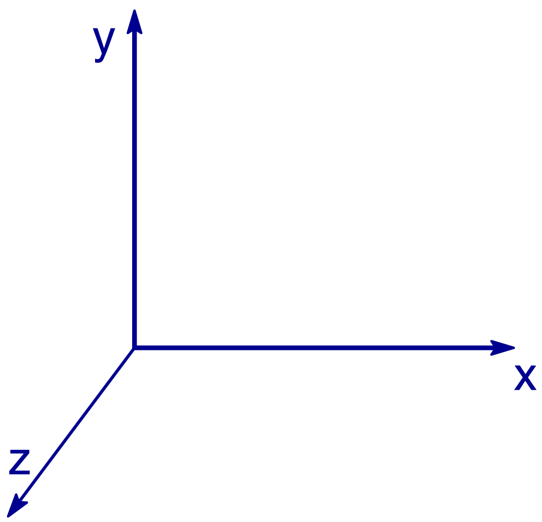
Ebene und Normale

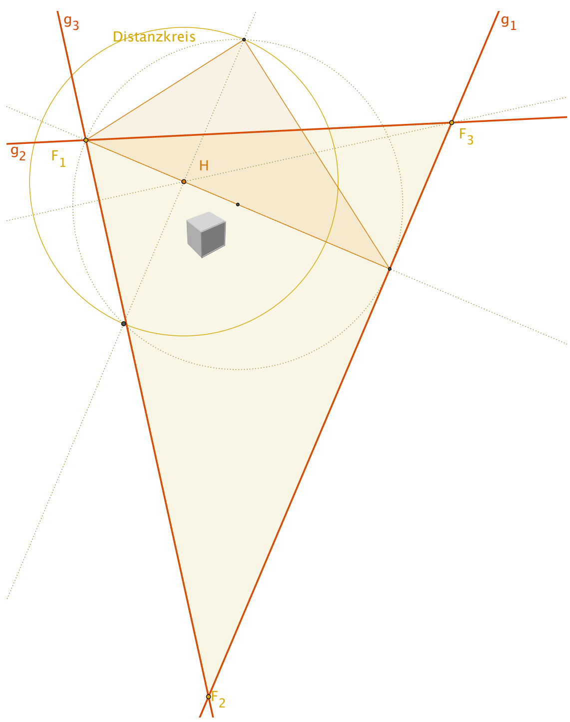




Normalenfluchtpunkt

Ebene und Normale





Fluchtdreieck eines Achsenkreuzes

Kap.6: Die Sonne und ihr Schatten

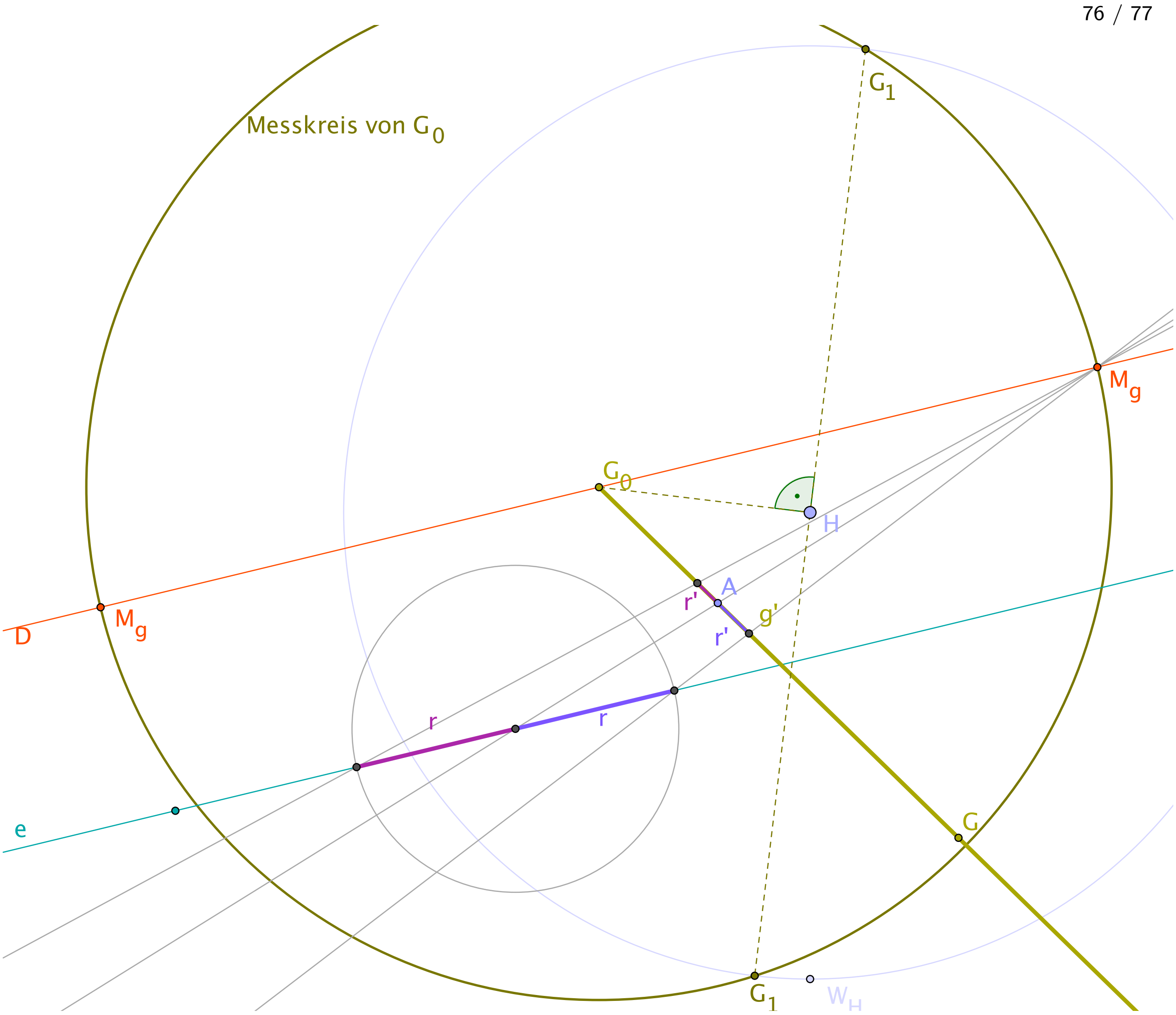
- Die Sonnenstrahlen treffen parallel auf die Erde.
- Der Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen heißt **Sonnenpunkt**.

Wo liegt der Sonnenpunkt?

Sonnenpunkt

- Sonne hinter Betrachter $\Rightarrow$ Sonnenpunkt unter dem Horizont.
- Sonne vor Betrachter $\Rightarrow$ Sonnenpunkt über dem Horizont.

Kap.6: Streckenmessung



Streckenmessung

1. G_0 Fluchtpunkt einer Geraden g
2. g' Bild von g
3. Messkreis von G_0 , hat als Radius den Abstand von G_0 zum Augpunkt.
4. D beliebiger Durchmesser, ist die Fluchtlinie der Ebene E_D, in der g in eine frontale Position gedreht wird.
5. e ist die Spurlinie von der Drehebene E_D, hier können wahre Längen abgemessen werden, e ist die Messlinie von G_0 bzgl. D.
6. M_g sind die Messpunkte von G_0 bzgl. D.