AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK
TRIESDORF, 27.09.-01.10.2004

PROF. DR. CHRISTINA BIRKENHAKE

Inhaltsverzeichnis

christina@birkenhake.net, http://www.mi.uni-erlangen.de/birken/ .

1. Eingangstest

Die folgenden Aufgaben dienen zur Selbstüberprüfung Ihres Kenntnisstandes.

Aufgabe 1:
Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach, welche der Zahlen sind gleich?

$$\frac{3}{15}\,; \quad \frac{15}{3}\,; \quad \frac{2}{5}\,; \quad 5\,\frac{1}{3}\,; \quad 5,3\,; \quad 5,333333\,; \quad 5,\overline{3}\,; \quad \frac{5\,001}{999}$$

Aufgabe 2:

(1) $19 - (+23) + (+11) + (-37) - (-16) =$

(2) $7 - [-5 - (-3)] - 4 + [3 - (-4) - 6] =$

Aufgabe 3:

(1) $3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-6) =$

(2) $(-5) \cdot 6 \cdot (-2) \cdot (-3) =$

Aufgabe 4:

(1) $\frac{7}{9} + \frac{5}{8} =$

(2) $\frac{5}{12} - \frac{5}{6} =$

(3) $\frac{8}{24} - \frac{9}{45} =$

(4) $\frac{1}{4} + \frac{11}{20} =$

Aufgabe 5:
Wandeln Sie Brüche in Dezimalzahlen um und umgekehrt:

(1) $0,1 =$

(2) $0,00002 =$

(3) $\frac{5}{7} =$

(4) $0,75 =$

(5) $2\frac{12}{96} =$

Aufgabe 6:
Klammern Sie aus bzw ein

(1) $3a + 3b =$

(2) $5x - 5y =$

(3) $(e - 1)e =$

(4) $6(3x - 4y) + 5(2x - 3y) =$

Aufgabe 7:
Wieviel Gramm Glucose sind in 290 g einer 0,9%-igen Glucoselösung enthalten?

Aufgabe 8:
Bestimme die Zusammensetzung von 2,5 kg einer 65%-igen wässrigen Schwefelsäurelösung.

Aufgabe 9:
Vereinfachen Sie soweit möglich:

(1) $\sqrt{p^2}$
(2) $\sqrt{(p+q)^2}$
(3) $\sqrt{p^2 + 2pq + q^2}$
(4) $\sqrt{p^2 - 2pq + q^2}$
(5) $\sqrt{p^2 + q^2}$
(6) $\sqrt{p^2 - q^2}$
(7) $(\sqrt{3} - 1)(1 + \sqrt{3})$

Aufgabe 10:

(1) $\log_2 8 =$
(2) $\log_4 2 =$
(3) $\log_4(2 \cdot 4) =$
(4) $\log_4 8 =$
(5) $\log_8 4 =$
(6) $\log_7 7^3 =$
(7) $\log_7 7^{\frac{3}{4}} =$

Aufgabe 11:
Aus dem Rechenbuch des Abu Zacharjia el Hassar:
Bei einem Fisch nimmt der Kopf ein Drittel und der Schwanz ein Viertel seines Gewichtes ein, das Mittelstück wiegt 10 Pfund. Wieviel wiegt der Fisch?

2. Grundbegriffe

Mengen

Mengenklammern: $\{\ldots\}$

Beispiele für Mengen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\{x \mid x$ ist Student oder x ist älter als 40 Jahre$\}$

$A := \{z \mid z$ ist eine gerade natürliche Zahl$\}$

Leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\}$

Mengenrelationen:

$A \cup B$	Menge A vereinigt mit Menge B
$A \cap B$	A geschnitten B
$A \subset B$	A ist Teilmenge von B
$A \backslash B$	A ohne die Elemente der Menge $A \cap B$
$x \in A$	x ist Element der Menge A

Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Beispiele rationaler Zahlen: $\frac{1}{2} = 0,5$ (z.B. ein halbes Jahr),

$\frac{1}{12}$ (z.B. Tortenstück),

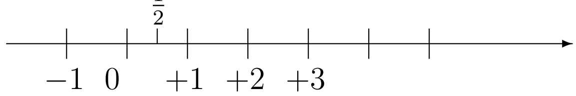
$\frac{3}{4} = 0,75$ (z.B. dreiviertel 12 = 11.45 h),

$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 0,6666\ldots$ periodische Zahl.

Irrationale Zahlen: Zahlen wie die Kreiszahl $\pi = 3,14\ldots$, die Eulersche Zahl $e = 2,71\ldots$, und Wurzeln wie z.B. $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ haben in ihrer Dezimalentwicklung unendlichviele (nichtperiodische) Stellen. Solche Zahlen heißen *irrational.*

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$irrationale Zahlen$\}$

Die reellen Zahlen werden auf dem *Zahlenstrahl* veranschaulicht:



Anordnung von Zahlen:	$x < y$	x ist kleiner y
	$x \leq y$	x ist kleiner gleich y
	$x = y$	x ist gleich y
	$x > y$	x ist größer y
	$x \geq y$	x ist größer gleich y

Intervalle:

$[\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	beidseitig abgeschlossenes Intervall
$]\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	beidseitig offenes Intervall
$]\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$[\,a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	unendliches Intervall
$]\,a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	unendliches Intervall
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	unendliches Intervall
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	unendliches Intervall

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Wodurch unterscheiden sich die Mengen $\{\}$ und $\emptyset$?

Aufgabe 2:
Beschreiben Sie die Mengen $A = \{x \mid x$ ist Student oder x ist älter als 40 Jahre$\}$ und $B = \{x \mid x$ ist Student und x ist älter als 40 Jahre$\}$.

Aufgabe 3:
Sei $A := \{1, 2, 5, 6, 12, 16, 18\}$ und $B := \{-1, 0, 2, 5, 6, 16\}$. Bestimmen Sie

(1) $A \cup B =$
(2) $A \cap B =$
(3) $A \backslash B =$
(4) $B \backslash A =$
(5) $2 \in$
(6) $1 \in$

Aufgabe 4:
Welches der folgenden Beispiele sind Mengen?

(1) $A = \{2, 3, 100\}$
(2) $B = \{2, 3, 1, 2\}$
(3) $C = \{\}$
(4) $D = \{A, 1, C\}$

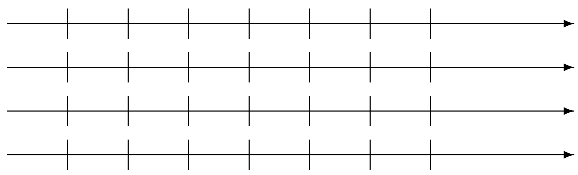
Aufgabe 5:
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(1) $4 \leq 4$
(2) $6 > 7$
(3) $6 < 7$
(4) $1000 \geq 0$
(5) $5 = 8$

Aufgabe 6:
Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle und umgekehrt.

(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$
(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid 8 \geq x > -4\}$
(3) $[12, 154]$
(4) $]-\infty, -100[$

Aufgabe 7:
Skizzieren Sie die Mengen aus Aufgabe 6 auf dem Zahlenstrahl.



Aufgabe 8:

(1) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) =$

(2) $\frac{11}{13} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) =$

(3) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} =$

(4) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6} =$

(5) $\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} =$

(Aufgaben aus dem Eingangstest:)

Aufgabe 9:
Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach, welche der Zahlen sind gleich?

$$\frac{3}{15}\,; \quad \frac{15}{3}\,; \quad \frac{2}{5}\,; \quad 5\,\frac{1}{3}\,; \quad 5,3\,; \quad 5,333333\,; \quad 5,\overline{3}\,; \quad \frac{5\,001}{999}$$

Aufgabe 10:

(1) $19 - (+23) + (+11) + (-37) - (-16) =$

(2) $7 - [-5 - (-3)] - 4 + [3 - (-4) - 6] =$

Aufgabe 11:

(1) $3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-6) =$

(2) $(-5) \cdot 6 \cdot (-2) \cdot (-3) =$

Aufgabe 12:

(1) $\frac{7}{9} + \frac{5}{8} =$

(2) $\frac{5}{12} - \frac{5}{6} =$

(3) $\frac{8}{24} - \frac{9}{45} =$

(4) $\frac{1}{4} + \frac{11}{20} =$

Aufgabe 13:
Wandeln Sie Brüche in Dezimalzahlen um und umgekehrt:

(1) $0,1 =$

(2) $0,00002 =$

(3) $\frac{5}{7} =$

(4) $0,75 =$

(5) $2\frac{12}{96} =$

Aufgabe 14:
Klammern Sie aus bzw ein

(1) $3a + 3b =$

(2) $5x - 5y =$

(3) $(e-1)e =$

(4) $6(3x-4y) + 5(2x-3y) =$

3. Prozentrechnung

Prozent: $\% = \frac{1}{100}$

Das Symbol % wird immer als Faktor, also multiplikativ, verwendet.

Beispiele:

a) 5% von 40 € sind $40 \cdot 5\% = 40 \cdot 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{200}{100} = 2$ Euro

b) Sie erhalten eine Rechnung über 2 000 € mit 2% Skonto bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen. Das heißt, bei Zahlung innerhalb der ersten 10 Tage nach Rechnungserhalt genügt es

$$2\,000 - 2\,000 \cdot 2\% = 2\,000 \cdot (1 - \tfrac{2}{100}) = 2\,000 \cdot 0,98 = 1\,960$$

Euro zu bezahlen.

c) Auf Ihren Sparkonto erhalten Sie 7% Zinsen jährlich. Sie legen 3 000 € für ein Jahr fest zu diesem Zinssatz an. Dann erhalten Sie nach Jahresabschluss

$$3\,000 \cdot 7\% = 3\,000 \cdot \tfrac{7}{100} = 210$$

Euro Zinsen und Ihr Kapital erhöht sich auf 3 210 €.

Aufgaben aus dem Eingangstest:

Aufgabe 7
Wielviel Gramm Glucose sind in 290 g einer $0,9\%$-tigen Glucoselösung enthalten?

Lösung:
In 290 g Lösung sind $290 \cdot 0,9\% = 290 \cdot \frac{0,9}{100} = 2,61$ Gramm Glucose.

Aufgabe 8
Bestimme die Zusammensetzung von 2,5 kg einer 65%-igen wässrigen Schwefelsäurelösung.

Lösung:
Anteil Schwefelsäure: $2,5\,\mathrm{kg} \cdot 65\% = 2,5\,\mathrm{kg} \cdot \frac{65}{100} = 1,625\,\mathrm{kg}$
Anteil Wasser: $2,5\,\mathrm{kg} - 1,625\,\mathrm{kg} = 0,875\,\mathrm{kg}$

Diese Aufgaben lassen sich auch mit *Dreisatz* lösen:

zu Aufgabe 7: 100 g Lösung enthalten $100 \cdot 0,9\% = 0,9$ g Glucose.
1 g Lösung enthalten $\frac{0,9}{100}$ g Glucose.
290 g Lösung enthalten $290 \cdot \frac{0,9}{100} = 2,61$ g Glucose.

graphische Lösung:

$$\begin{array}{lll} 100 \text{ g Lösung} & 0,9 \text{ g Glucose} & \\ 290 \text{ g Lösung} & \dfrac{290\text{g} \cdot 0,9\text{g}}{100\text{g}} & = 2,61\,\text{g Glucose} \end{array}$$

zu Aufgabe 8: 100 kg Lösung enthalten 65 kg Schwefelsäure.
1 kg Lösung enthält $\frac{65}{100}$ kg Schwefelsäure.
$2,5$ kg Lösung enthalten $2,5 \cdot \frac{65}{100} = 1,625$ kg Schwefelsäure.

graphische Lösung:

$$\begin{array}{lll} 100 \text{ kg Lösung} & 65 \text{ kg S-Säure} & \\ 2,5 \text{ kg Lösung} & \dfrac{2,5\text{kg} \cdot 65\text{kg}}{100\text{g}} & = 1,625\,\text{kg S-Säure} \end{array}$$

Beispiel:
Sie mischen 10%-tige wässrige Salzsäure Lösung (L_1) und 5%-tige Salzsäure Lösung (L_2) im Verhältnis 1 zu 2. Was ist die Konzentration der Mischung (L)?
Lösung :

$$\begin{array}{lrl} & 100\,g\,L_1 + 200\,g\,L_2 = & 300\,g\,L \\ \text{diese enthalten:} & 10\,g\,SS + 2 \cdot 5\,g\,SS = & 20\,g\,SS \\ \text{damit enthalten:} & 100\,g\,L & \frac{20}{3}\,g\,SS \end{array}$$

Die Konzentration von L ist damit $\frac{20}{3}\% = 6,\overline{6}\%$

Beispiel:
4%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu $12,5$%-iger Kalilauge gemischt werden. Man bestimme das benötigte Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$.
Lösung:
Masse von L_i ist m_i. Dann ist die Masse m von der Mischung L $m(L) = m_1 + m_2$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 4\%m_1 + 20\%m_2 &= 12,5\%(m_1 + m_2) && \Big| \cdot \tfrac{1}{m_2} \cdot \tfrac{1}{\%} \\ 4\tfrac{m_1}{m_2} + 20 &= 12,5\big(\tfrac{m_1}{m_2} + 1\big) \\ 20 - 12,5 &= (12,5 - 4)\tfrac{m_1}{m_2} \\ \frac{m_1}{m_2} &= \frac{|w_2 - w|}{|w - w_1|} = \frac{20 - 12,5}{12,5 - 4} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

Das Massenverhältnis ist $\frac{m_1}{m_2} = \frac{15}{17}$, also 15 Teile L_1 und 17 Teile L_2 werden benötigt.
Mischungskreuz:

$$\begin{tikzcd} 4\%L_1 \arrow[dr] & & {} \\ & 12,5\%L \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 20\%L_2 \arrow[ur] & & {} \end{tikzcd} \qquad \frac{20 - 12,5}{12,5 - 4} = \frac{m_1}{m_2}$$

Beispiel:
14%-ige und $1,6$%-ige Magnesiumchloridlösung sollen zu $1,8\,kg$ 10%-iger Magnesiumchloridlösung gemischt werden. Welche Massen m_1 und m_2 an Ausgangslösungen werden benötigt?
Lösung:
Wie oben berechne man zuerst das Massenverhältnis:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{10 - 1,6}{14 - 10} = 2,1$$

Es werden verlangt:

$$\begin{aligned} 1,8\,kg = m(L) = m_1 + m_2 &= m_2(\frac{m_1}{m_2} + 1) = m_2(2,1 + 1) \\ m_2 &= \frac{m(L)}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{1,8\,kg}{3,1} = 580,64\,g \\ m_1 &= m(L) - m_2 = 1,8\,kg - 580,64\,g = 1,22\,kg \end{aligned}$$

Beispiel:
Berechnen Sie die Masse m und die Konzentration w der Mischung von $3,3\,kg$ 5%-tige und $275\,g$ 85%-tige Phosphorsäure.
Lösung:

$$\begin{aligned} m &= 3,3\,kg + 275\,g = 3,575\,kg \\ 5\% \cdot 3,3\,kg + 85\% \cdot 0,275\,kg &= w \cdot 3,575\,kg \\ w &= \frac{5 \cdot 3,3 + 85 \cdot 0,275}{3,575}\% = 11,15\% \end{aligned}$$

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die Massenverhältnisse:

(1) $7,5\%$-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu $12,5\%$-iger Kalilauge gemischt werden.

(2) 37%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 11%-iger Salzsäure gemischt werden.

(3) 10%-ige und 2%ige Salzsäure sollen zu 7%-iger Salzsäure gemischt werden.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die benötigen Massen m_1 und m_2 der Ausgangslösungen:

(1) 5%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu $750\,g$ 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.

(2) 16%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu $750\,g$ 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.

(3) 12%-ige und $1,6\%$-ige Magnesiumchloridlösung sollen zu $1,8\,kg$ 10%-iger Magnesiumchloridlösung gemischt werden.

(4) $6,2\%$-ige und $0,09\%$-ige Kaliumdichromatlösung sollen zu $670\,g$ 4%-iger Kaliumdichromatlösung gemischt werden.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Masse m und die Konzentration w der Mischung von

(1) $4\,kg$ 10%-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

(2) $4\,kg$ $7,2\%$-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

(3) $2,7\,kg$ 5%-tige und $275\,g$ 85%-tige und $1,06\,kg$ 14%-tige Phosphorsäure.

(4) $0,9\,kg$ $99,8\%$-tige und $440\,g$ $9,6\%$-tige und $88\,g$ 43%-tige Essigsäure.

(5) $0,9\,kg$ 55%-tige und $440\,g$ $9,6\%$-tige und $88\,g$ 43%-tige Essigsäure.

(6) $650\,g$ $45,5\%$-tige und $1,2\,kg$ 10%-tige und $870\,g$ 15%-tige und $3,2\,kg$ 2%-tige Natronlauge.

4. Potenzen und Wurzeln

Potenzen einer Zahl:

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ a^4 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

Für den Term a^n heißt a die *Basis* und n der *Exponent* oder *Hochzahl*.

Spezielle Potenzen: $a^1 = a$

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit negativem Exponenten: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Beispiele: $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$

$$10^3 = 1000$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Rechenregeln für Potenzen: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\ \left(a^n\right)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned}$$

Beispiele: $4^{-2} \cdot 4^7 = 4^{7-2} = 4^5 = 1024$

$$4^{-5} \cdot a^{-5} = (4a)^{-5} = \frac{1}{(4a)^5} = \left(\frac{1}{4a}\right)^5$$

$$(z-2)^3 \cdot (z+2)^3 = \big((z-2) \cdot (z+2)\big)^3 = (z^2 - 4)^3$$

$$\left(3^2\right)^{-7} = 3^{2 \cdot (-7)} = 3^{-14} = 2,1 \cdot 10^{-7}$$

Zehnerpotenzen:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ 10^{-2} &= 0,01 \\ 10^{-1} &= 0,1 \\ 10^0 &= 1 \\ 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiele: $342,1 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$

$5\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$

$6,0221367 \cdot 10^{23} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ Avogadrosche Konstante

Potenzen mit rationalen Exponenten:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$
$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$
$$\vdots$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Der Term $\sqrt[n]{a}$ heißt *n-te Wurzel aus a*. Im Fall $n = 2$, also $\sqrt{a}$, spricht man auch von der *Quadratwurzel*. Für den Term $\sqrt[n]{a}$ heißt a der *Radikant*. Der Radikant darf nicht negativ sein, also $a \geq 0$.

Für die Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die gleichen Rechenregeln wie oben.

Beispiele: $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} \simeq 2,378$ (Taschenrechner)

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{8}^2 = \sqrt[3]{2^3}^2 = 2^2 = 4$

$2^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \simeq 0,397$ (Taschenrechner)

Rechenregeln für Wurzeln:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Aufgabe 9

(Eingangstest) Vereinfachen Sie soweit möglich:

(1) $\sqrt{p^2}$
(2) $\sqrt{(p+q)^2}$

Lösungen:

(1) $\sqrt{p^2} = p$
(2) $\sqrt{(p+q)^2} = p + q$

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
Vereinfachen Sie (wenn möglich) die folgenden Ausdrücke

(1) $z^m \cdot z^{-m} =$

(2) $\frac{3^2 \cdot 2^3}{36} =$

(3) $x^{-3} : y^{-3} =$

(4) $x^5 : y^{-5} =$

(5) $\frac{p^{3m}}{p^{-4m}} =$

(6) $7^{-5} \cdot 7^8 =$

(7) $7^5 + 7^8 =$

(8) $7^5 + 8^5 =$

(9) $(a^4)^{-1} \cdot a^5 =$

(10) $\frac{2{,}8^9 \cdot x^7 \cdot y^2}{2{,}8^{12} \cdot y^4 \cdot x^5} =$

Aufgabe 2:
Mit Taschenrechner, auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

(1) $2,41^2 =$

(2) $(-3,5)^2 =$

(3) $(-3,5)^3 =$

(4) $(3,5 - 2,7^2)^3 =$

(5) $\frac{1{,}9^3 + 5{,}2^5}{2^6} =$

(6) $\frac{(-4{,}2)^3 \cdot 9{,}1}{1{,}45^6} =$

(7) $(5,52 + 1,75)^3 + (6,24 + 4,23)^2 =$

Aufgabe 3:
Vereinfachen Sie und verwenden Sie Zehnerpotenzen

(1) $\sqrt{287\,296\,000\,000} =$

(2) $\sqrt{0,000\,006\,25} =$

(3) $\sqrt{0,000\,062\,5} =$

(4) $\sqrt{0,000\,000\,27} =$

(5) $\sqrt[4]{24\,010\,000} =$

(6) $\sqrt{3\,422\,500} =$

Aufgabe 4:

(1) $\sqrt{0,01} =$

(2) $25^{-\frac{1}{2}} =$

(3) $27^{\frac{1}{3}} =$

(4) $4,24 - \sqrt{7} =$

(5) $\sqrt{0,000004} =$

Aufgabe 5:
Vereinfache die folgenden Terme

(1) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} =$

(2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{4}} =$

(3) $\pi^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{8\pi}{125}\right)^{\frac{1}{3}} =$

(4) $\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a}\right)^{\frac{1}{4}} =$ mit $a > 0$

(5) $\sqrt{125} =$

(6) $\sqrt[3]{125} =$

(7) $\sqrt{\frac{20}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}} =$

Aufgabe 6:

(1) $9^2 + 16^2 =$

(2) $(9 + 16)^2 =$

(3) $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$

(4) $\sqrt{9 + 16} =$

(5) $\sqrt{9^2 + 16^2} =$

Aufgabe 7:

Vereinfache so weit wie möglich (Ohne Taschenrechner!)

(1) $\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{27} =$

(2) $\frac{\sqrt{18}\sqrt{4}\sqrt{2,3}}{\sqrt{5,3}} =$

(3) $\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{24} =$

(4) $\frac{\sqrt{0,2 \cdot 0,4 \cdot 8}}{\sqrt{0,5}} =$

Aufgabe 8:

Berechne auf 2 Dezimalstellen genau

(1) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} =$

(2) $\frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{25}}{7} =$

(3) $\frac{-\sqrt{60} - 5\sqrt{90}}{\sqrt{2560}} =$

(4) $3\sqrt{200} - 5\sqrt{7} =$

(5) $\frac{8\sqrt{200} - 2\sqrt{8}}{0,2} =$

(6) $\frac{\sqrt{300} + \sqrt{38}}{\sqrt{57}} =$

5. Binomische Formeln

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aufgabe 9

(Eingangstest) Vereinfachen Sie soweit möglich:

(1) $\sqrt{p^2 + 2pq + q^2}$

(2) $\sqrt{p^2 - 2pq + q^2}$

(3) $\sqrt{p^2 + q^2}$

(4) $\sqrt{p^2 - q^2}$

(5) $(\sqrt{3} - 1)(1 + \sqrt{3})$

Lösungen:

(1) $\sqrt{p^2 + 2pq + q^2} = \sqrt{(p+q)^2} = p + q$

(2) $\sqrt{p^2 - 2pq + q^2} = \sqrt{(p-q)^2} = p - q$

(3) $\sqrt{p^2 + q^2}$

(4) $\sqrt{p^2 - q^2} = \sqrt{(p+q)(p-q)}$

(5) $\big(\sqrt{3} - 1\big)\big(1 + \sqrt{3}\big) = \big(\sqrt{3} + 1\big)\big(\sqrt{3} - 1\big) = \big(\sqrt{3}\big)^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:

(1) $(p+q)(p+q)$
(2) $(15r+13)(15r+13)$
(3) $(x+y)(x+y)$
(4) $(r+s)^2$
(5) $(2m+3n)(2m+3n)$
(6) $(3x+2y)^2$
(7) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

Aufgabe 2:

(1) $(p-q)(p-q)$
(2) $(15r-13)(15r-13)$
(3) $(x-y)(x-y)$
(4) $(r-s)^2$
(5) $(2m-3n)(2m-3n)$
(6) $(3x-2y)^2$

Aufgabe 3:

(1) $(p-q)(p+q)$
(2) $(15r+13)(15r-13)$
(3) $(x-y)(x+y)$
(4) $(r-s)(s+r)$
(5) $(2m+3n)(2m-3n)$
(6) $(3x+2y)(3x-2y)$

Aufgabe 4:

(1) $(a+b)^2+(a-b)^2$
(2) $(x+y)(x+y)(x-y)(x-y)$
(3) $(p+q)^2(p-q)^2$
(4) $m^2-2mn+n^2$
(5) $uv-u^2+uw$
(6) m^2-n^2
(7) x^2-1
(8) x^4-1
(9) $a^2+14a+49$
(10) $p^2+2pq+q^2-r^2$
(11) r^2-6r+9

6. Logarithmen

Beispiele:

$$10^x = 1000 \qquad \Leftrightarrow \quad x = 3$$
$$2^x = \frac{1}{16} \qquad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

Problem: Finde die Lösung der Gleichung:

$$a^x = b, \quad \text{mit } a, b > 0$$

Logarithmus: $\log_a b$ ist die (einzige) Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a, b > 0$. Also

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$\log_a b$ heißt *Logarithmus von b zur Basis a.*

Beispiele: $\log_{10} 10\,000 = 4$ denn $10\,000 = 10^4$

$\log_{10} 0,1 = -1$ denn $10^{-1} = 0,1$

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$ denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Spezielle Logarithmen: $\log = \mathrm{Lg} = \lg = \mathrm{Log} = \log_{10}$ Zehnerlogarithmus

$\ln = \log_e$ natürlicher Logarithmus

Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a \tfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\log_a \big(b^c\big) = c \cdot \log_a b$$
$$\log_a b = \tfrac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a b} = b$$

Rechnen mit Logarithmen:

$$\log_7 3 = \tfrac{\log 3}{\log 7} = \tfrac{\ln 3}{\ln 7} \simeq 0,5646$$
$$\log_5(4 \cdot 7 \cdot 3^9) = \log_5 4 + \log_5 7 + 9 \cdot \log_5 3 = \tfrac{\log 4 + \log 7 + 9 \log 3}{\log 5} \simeq 8,2139$$
$$\log_7(3 \cdot 5^{-3}) = \log_7 3 - 3 \log_7 5 = \tfrac{\ln 3 - 3 \ln 5}{\ln 7} \simeq -1,92$$

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1:
Berechnen Sie ohne Taschenrechner

(1) $\log_{10} 100 =$

(2) $\log_2 8 =$

(3) $\log_{10} 1000 =$

(4) $\log_2 0,125 =$

(5) $\log_3 9 =$

(6) $\log_2 16 =$

Aufgabe 2:

(1) $\ln 5 =$

(2) $\ln 500 =$

(3) $\ln 0,1 =$

(4) $\ln e^2 =$

(5) $\ln e^{-1} =$

(6) $\ln \sqrt{e} =$

(7) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} =$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie ohne Taschenrechner (Hinweis: $\lg 2 = 0,301$)

(1) $\lg 200 =$

(2) $\lg 0,2 =$

(3) $\lg 10 =$

Aufgabe 4:
Lösen Sie die folgenen Gleichungen (ohne Taschenrechner):

(1) $2^x = 32$

(2) $10^x = 10000$

(3) $10^y = 20$

(4) $e^z = 1$

(5) $2^z = 1024$

Aufgabe 5:
Man berechne mit Hilfe des Taschenrechners

(1) $\log_7 13 =$

(2) $\log 111$

(3) $\log_{12} \sqrt{3}$

(4) $\ln 3$

(5) $\ln\left(2^6\right)$

Aufgabe 6:
(Eingangstest)

(1) $\log_2 8 =$

(2) $\log_4 2 =$

(3) $\log_4(2 \cdot 4) =$

(4) $\log_4 8 =$

(5) $\log_8 4 =$

(6) $\log_2(4\sqrt{2}) =$

(7) $\log_6 \sqrt{6} =$

(8) $\log_7 7^3 =$

(9) $\log_7 7^{\frac{3}{4}} =$

Aufgabe 11

(Eingangstest) Aus dem Rechenbuch des Abu Zacharjia el Hassar:
Bei einem Fisch nimmt der Kopf ein Drittel und der Schwanz ein Viertel seines Gewichtes ein, das Mittelstück wiegt 10 Pfund. Wieviel wiegt der Fisch?

Lösung:

Der Fisch besteht aus Kopf, Mittelstück und Schwanz. Ist x das Gewicht des Fisches, also gilt:

$$x = \frac{1}{3}x + 10 + \frac{1}{4}x$$

Auflösen nach x liefert:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x &= 10 \\ x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) &= 10 \\ x = \frac{10}{(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4})} = \frac{10}{\frac{12-4-3}{12}} &= \frac{10 \cdot 12}{5} = 24 \end{aligned}$$

Der Fisch wiegt also 24 Pfund.

Hierbei handelt es sich um eine sogenannte *algebraische* Gleichung, das heißt, die Unbekannte oder auch Variable (hier x) kommt als Summand der Form x^n mit $n \in \mathbb{N}$ vor. Eine allgemeine algebraische Gleichung (über $\mathbb{R}$) ist von der Form:

$$a_n n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}$$

Die einfachsten algebraischen Gleichungen sind die:

Linearen Gleichungen: $ax = b$ mit $a \neq 0$.

Die Gleichung aus Aufgabe 11 ist linear.

Lösung linearer Gleichungen: $x = \frac{b}{a}$

Die Aufgaben auf dem nächsten Aufgabenblatt lassen sich durch Umformungen alle auf lineare Gleichungen zurückführen. Bei Gleichungen mit x im Nenner berücksichtigen Sie bitte auch die Definitionsmenge.

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:

Aus dem Rechenbuch des Inders Bhaskara (ca.1150 n.Chr.):
Von einem Schwarm Bienen läßt sich ein Fünftel auf einer Kadamabablüte, ein Drittel auf einer Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja; eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und her schwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandanus. Sage mir nun die Anzahl der Bienen.

Aufgabe 2:

(1) $\frac{x}{c} - b = a$

(2) $\frac{x}{p} + 1 = \frac{q}{p}$

(3) $cx - d = x$

(4) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

(5) $(p + x)(q + x) = (p - x)(q - x)$

(6) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{b}$

(7) $x(a - b) = a(b - x)$

(8) $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = m - n$

(9) $ax - bx = cx$

Aufgabe 3:

(1) $(x+5)^2 = (7-x)^2 + 24$

(2) $(x+9)^2 = (x-5)^2$

(3) $5(2x+1)^2 - 4(2x-1)^2 = 4x(x+8)$

(4) $7x - 42 = 6x + 12$

Aufgabe 4:

(1) $\frac{16}{1-x} = 4$

(2) $\frac{3x+4}{x} - \frac{2x}{x+1} = 1$

(3) $\frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4}$

(4) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-3}$

Aufgabe 5:

(1) $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-1}$

(2) $\frac{15}{2x+1} - \frac{20}{3x} = 0$

(3) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{2-x}{6-x} = 0$

(4) $\frac{3x-7}{x-4} = \frac{5x-5}{x+7} - 2$

8. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$

Normalform einer quadratischen Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

Eine quadratische Gleichung hat entweder 2, eine oder keine Lösung, je nachdem ob die *Diskriminante* $\frac{p^2}{4} - q$ positiv, 0 oder negativ ist.
Lösung, (p, q)-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiele:

(1)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 48 &= 0 && | \cdot \tfrac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 24 &= 0 && |p = -2,\ q = -24 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - (-24)} = 1 \pm 5 \\ x_1 &= 6, \quad x_2 = -4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 16 &= 4 && | - 4 \\ 4x^2 + 4x + 12 &= 0 && | \cdot \tfrac{1}{4} \\ x^2 + x + 3 &= 0 && |p = 1,\ q = 3 \\ x_{1/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 12}}{2} \end{aligned}$$

Wegen $1 - 12 = -11 < 0$ hat diese Gleichung keine Lösung.

(3)

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= 0 && \text{(Ausklammern)} \\ x(x + 4) &= 0 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = -4 \end{aligned}$$

Sind x_1 und x_2 die Lösungen von $x^2+px+q=0$, so gilt:

$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-x\cdot x_2-x_1\cdot x+x_1\cdot x_2=x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2$

Daraus folgt der:

Satz von Vieta: *Für die Lösungen x_1 und x_2 von $x^2+px+q=0$ gilt $x_1+x_2=-p$ und $x_1\cdot x_2=q$.*

Beispiele:

(1) $x^2-7x+10=0, \quad \Rightarrow q=10=2\cdot 5, \quad -p=7=2+5$,
Lösungen: $x_1=2$ und $x_2=5$

(2) $x^2-3x-28=0, \quad \Rightarrow q=-28=-4\cdot 7, \quad -p=3=7+(-4)$, Lösungen: $x_1=7$ und $x_2=-4$

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:

(1) $(x-12)(x+12)=0$

(2) $(x-12)(x+12)=25$

(3) $(18x+7)(18x-7)=0$

(4) $(x-5)(x+5)=0$

(5) $(x-5)(x+5)=-9$

(6) $(18x+7)(18x-7)-32=0$

(7) $(x-3)(x+2)+x=19$

Aufgabe 2:

(1) $\sqrt{x^2-x+0,25}=0$

(2) $x^2-x+0,25=0$

(3) $\sqrt{6,25x^2+2x+0,16}=0$

(4) $6,25x^2+2x+0,16=0$

Aufgabe 3:

(1) $x - 4 = 0$

(2) $(x-4)^2 = 0$

(3) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(4) $x(x-4) = 0$

(5) $x^2 - 4x = 0$

(6) $x^2 = 4x$

(7) $x^2 = 7x$

(8) $x^2 = -7x$

(9) $x^2 = 4$

(10) $x^2 = 9$

(11) $x^2 = \frac{1}{9}$

(12) $x^2 = \frac{4}{9}$

(13) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

(14) $5x^2 = 75$

(15) $x^2 - 0,9 = 0$

(16) $x^2 - (-4)^2 = 0$

(17) $64x^2 = 2916$

Aufgabe 4:

(1) $\frac{x}{12} = \frac{12}{x}$

(2) $\frac{3}{x} - \frac{x}{8} = \frac{1}{x}$

(3) $\frac{12}{x^2} = \frac{10}{x^2-6}$

(4) $\frac{2x-4}{3(x+2)} = \frac{x-2}{2x+4}$

Aufgabe 5:

(1) $x^2 = 64$

(2) $x^2 = 0,01$

(3) $3x^2 = 147$

(4) $6x^2 = 0,015$

(5) $64x^2 = 625$

(6) $x^2 - 324 = 0$

(7) $x^2 - 1,21 = 0$

(8) $x(x+7) = 7(x+28)$

9. Wurzel, Logarithmus und Exponentialgleichungen

Hierbei handelt es sich um Gleichungen, bei denen die Variable in Wurzel, Logarithmus und Exponentialausdrücken vorkommt.

Beispiele:

(1) $\sqrt{\frac{x}{5}-2}-4=-\sqrt{\frac{x}{5}-2}$

(2) $\sqrt{5-6x^2}-3x=0$

(3) $\sqrt{x+5}+10=5$

Durch geeignete Umformungen lassen sich Wurzelgleichungen in algebraische Gleichungen umformen:

(1)

$$\begin{aligned} \sqrt{\tfrac{x}{5}-2}-4 &= -\sqrt{\tfrac{x}{5}-2} \\ 2\sqrt{\tfrac{x}{5}-2} &= 4 && \text{(quadrieren)} \\ \tfrac{x}{5}-2 &= 4 \\ x &= 5(4+2)=30 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{\frac{30}{5}-2}-4=\sqrt{4}-4=-2=-\sqrt{\frac{30}{5}-2}$, also $\mathbb{L}=\{30\}$.

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt{5-6x^2}-3x &= 0 && \mid +3x \\ \sqrt{5-6x^2} &= 3x && \text{(quadrieren)} \\ 5-6x^2 &= 9x^2 && \mid +6x^2 \\ 5 &= 15x^2 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x_{1/2} &= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{5-6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{3}=3\frac{1}{\sqrt{3}}$, also ist $\mathbb{L}=\{\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

(3)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+5}+10 &= 5 && |-10\\
\sqrt{x+5} &= -5 && \text{(quadrieren)}\\
x+5 &= 25 && |-5\\
x &= 20
\end{aligned}
$$

Probe: $\sqrt{20+5}+10=\sqrt{25}+10=15\neq 5$, also ist $x=20$ keine Lösung und $\mathbb{L}=\{\}$.

An den Beispielen sieht man, daß es bei Wurzelgleichungen vorkommen kann, daß sich durch Umformungen die Lösungsmengen ändern kann. Deshalb ist bei diesen Gleichungen immer eine Probe notwendig.

Beispiel:

$$5\cdot 4^{2x-3}=9^{x-1}$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
5\cdot 4^{2x-3} &= 9^{x-1} && \text{(logarithmieren)}\\
\lg 5\cdot 4^{2x-3} &= \lg 9^{x-1}\\
\lg 5+(2x-3)\lg 4 &= (x-1)\lg 9 && \text{(nach } x \text{ auflösen)}\\
(2\lg 4-\lg 9)x &= 3\lg 4-\lg 5-\lg 9\\
x &= \frac{3\lg 4-\lg 5-\lg 9}{2\lg 4-\lg 9}\simeq 0,6122
\end{aligned}
$$

Hilfreich bei Logarithmusgleichungen ist die Regel:

$$a^{\log_a bx}=x$$

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:

(1) $\sqrt{2x+4} = 12$
(2) $\sqrt{x-4} = -6$
(3) $\sqrt{2x} + 40 = x$
(4) $\sqrt{x} + \sqrt{5+x} = 5$
(5) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{5x+1} = 2$
(6) $\sqrt{ax} + \sqrt{\frac{x}{a}} = 1 + a$
(7) $\sqrt{2+\sqrt{7x+1}} = 2\sqrt{2}$
(8) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = x+3$
(9) $\sqrt{x} + \sqrt{x-n} = n$
(10) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+3} = \sqrt{2x+21}$

Aufgabe 2:

(1) $\log_2 x = 1,5$
(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1,5$
(3) $\log_2 x = -1,5$
(4) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1,5$
(5) $\log_x 0,25 = 2$
(6) $\log_x 8 = -3$
(7) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$
(8) $\log_4 x = 0$

Aufgabe 3:

(1) $4^{x+1} = 16$
(2) $2 \cdot 8^{x+1} = 16^{x+3}$
(3) $4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x-1}$
(4) $19^{x-1} = 7^{2x+1}$
(5) $3^{\frac{1}{x}} = 17^{\frac{4}{2x+3}}$
(6) $10^{\lg x} = 1000$
(7) $3^{x+2} = \frac{1}{81}$
(8) $4^{2x} = \frac{1}{16}$
(9) $3^{\frac{1}{x}} = 17^{\frac{4}{2x+3}}$
(10) $3^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$
(11) $3 \cdot 3^x - 36 \cdot 3^{-x} + 3 = 0$
(12) $2^{x+3} - 2^{2-x} + 31 = 0$

Aufgabe 4:

Sie erben 35 000 € und legen diese zu einem Zinssatz von 7% p.a. fest an. Wann hat sich Ihr Kapital auf 50 000 € erhöht?

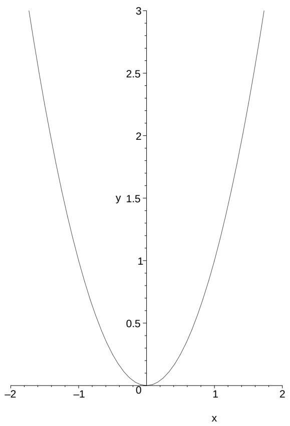
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Funktion: Eine reelle Funktion ist eine Zuordnung $f : I \to \mathbb{R}$.

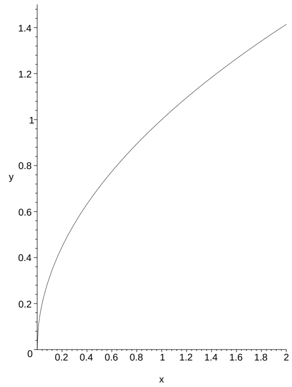
Beispiele: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
$f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-3}{x}$

Funktionen werden oft graphisch dargestellt, der *Graph* einer Funktion ist eine Kurve im xy-Koordinatensystem. Die Funktionen in unserem Beispiel habe die folgenden Graphen:

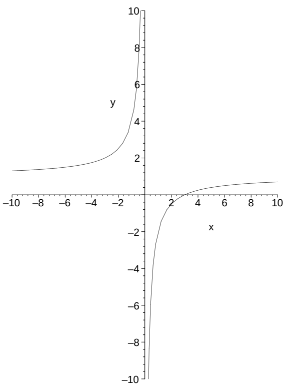
$f(x) = x^2$



$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \frac{x-3}{x}$



Zur Bestimmung des Graphen wird die Differentialrechnung hinzugezogen.

Die *Ableitung* einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist (soweit sie existiert) eine neue Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$. f' bestimmt man gemäß der folgenden Regeln:

Differentiationsregeln:

Faktorregel	$\big(a \cdot f(x)\big)' = a \cdot f'(x)$ für $a \in \mathbb{R}$
Summenregel	$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Ableitungen elementarer Funktionen:

$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x,\ a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \cot x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\big(1 + \cot^2 x\big)$

Beispiele:

a) $\big(3x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 2 + 2\ln x\big)' = 12x^3 - 6x^2 + 2x + 5 + \frac{2}{x}$

b) $\big(x^3 \cdot \sin x\big)' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$

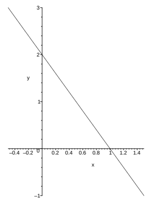
c) $\left(\frac{\cos x}{5x^3}\right)' = \frac{-\sin x \cdot 5x^3 - \cos x \cdot 15x^2}{25x^6}$

d) $\Big(\big(3x^2 - 5\big)^4\Big)' = 4\big(3x^2 - 5\big)^3 \cdot 6x$

Kurvendiskussion

Problemstellung: man erstelle einen möglichst exakten Graphen der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Dazu untersucht man die Funktion f gemäß der folgenden Kriterien:

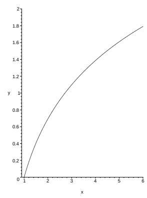
Nullstellen:



f hat eine Nullstelle bei x_0, wenn

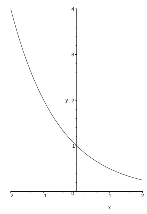
$$f(x_0) = 0$$

Monotonie:



f *monoton wachsend*, falls

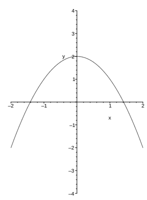
$$f'(x) \geq 0$$



f *monoton fallend*, falls

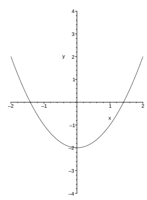
$$f'(x) \leq 0$$

Extrema:



f hat *Maximum* bei x_0, falls

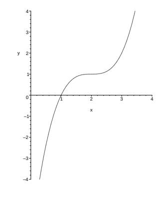
$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) < 0$$



f hat *Minimum* bei x_0, falls

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0$$

Wendepunkte:



f hat bei x_0 einen *Wendepunkt*, falls

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$$

Beispiel:

Bestimme den Graphen von

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

Dazu berechnet man die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 4x \cdot (x-1)(x-2) \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x + 8 = 12 \cdot \left(x^2 - 2x + \tfrac{2}{3}\right) \\ f'''(x) &= 24x - 24 = 24(x-1) \end{aligned}$$

Aus

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^2 \cdot (x-2)^2$$

ergeben sich die Nullstellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

Monotonie: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1)(x-2) \leq 0$. Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &x \leq 0,\ x \leq 1,\ x \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \\ &x \leq 0,\ x \geq 1,\ x \geq 2 \Leftrightarrow \lightning \\ &x \geq 0,\ x \geq 1,\ x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [1,2] \\ &x \geq 0,\ x \leq 1,\ x \geq 2 \Leftrightarrow \lightning \end{aligned}$$

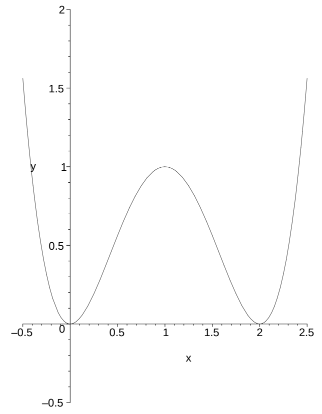
Also ist f monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ und $[1,2]$ und sonst monoton wachsend.
Extrema: Kandidaten für Extrema sind die Nullstellen $0, 1$ und 2 von f'. Auf $[0,2]$ muss ein Extremum und ein Wendepunkt liegen. Aus

$$f''(0) = 8 \geq 0,\ f''(1) = -4 \leq 0,\ f''(2) = 104 \geq 0$$

ergeben sich die Minima $x_3 = 0$ und $x_4 = 2$ und das Maximum $x_5 = 1$.

Wendepunkte: f'' hat die Nullstellen $x_6 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,423$ und $x_7 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 1,577$. Da dies keine Nullstellen von $f'''(x) = 24(x-1)$ sind, sind x_6 und x_7 Wendepunkte.

Der Graph von f sieht damit folgendermaßen aus:



Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
Berechnen Sie die erste Ableitung

(1) $f(x) = 3\sin^2 x$

(2) $f(x) = 4x^6$

(3) $f(x) = \log x$

(4) $f(x) = e^{2+x}$

(5) $f(x) = e^{2x}$

(6) $(f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

(7) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

(8) $f(x) = \log\sqrt{x}$

(9) $f(x) = \left(x^5 - 8x^2 + 5x\right)^{12}$

(10) $f(x) = \frac{2x^2+x^4}{(x-1)^2}$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

(1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}(x+1)^3$

(2) $f(x) = -x^2 + 4x$

(3) $f(x) = x^2 - x^4$

(4) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

11. Abschlusstest

Aufgabe 1:

(1) $\frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{7}{4} =$
(2) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) =$
(3) $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15} =$
(4) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{7}{12} =$

Aufgabe 2:

Klammern Sie aus bzw ein

(1) $(2p + 3q) \cdot 5 =$
(2) $2a(a^2 + 2ab) =$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die benötigen Massen der Ausgangslösungen:

(1) 5%-ige und $0,09$%-ige Kaliumdichromatlösung sollen zu $670\,g$ 4%-iger Kaliumdichromatlösung gemischt werden.
(2) 2%-ige und 70%-ige Chlorsäurelösung sollen zu $3,55\,kg$ $12,5$%-iger Chlorsäurelösung gemischt werden.

Aufgabe 4:

(1) $2x^6 + 4x^5 + \frac{3}{2}x^4 = 0$
(2) $x^2 - 5x + 4 = 0$

Aufgabe 5:

(1) $\frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x+2} = -2$
(2) $6 + \sqrt{2x+4} = 19$
(3) $\sqrt{3x+10} + 4 = x + 4$
(4) $4^x = 7$
(5) $\log\left(x^2 + 100\right) = 3$
(6) $2^{\ln x^2 - \ln x + 3} = 16$

Aufgabe 6:

(1) $\log_z c^{\frac{3}{2}}$
(2) $\log_z \frac{5a^2x}{7by^2}$
(3) $\log_z (ab)^2$
(4) $\log_z (a^2 + 2ab + b^2)$
(5) $\log_z (a - b)^2$
(6) $\log_z (a^2 - b^2)$

Aufgabe 7:

In welcher Zeit wächst ein Kapital von 5 000 € bei 5% jährlicher Verzinsung auf 10 000 € an?

12. Abschlusstest, Lösungen

Aufgabe 1:

(1) $\frac{5}{3} \cdot 4 - \frac{7}{4} = 4\frac{11}{12} = \frac{59}{12}$
(2) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{119}{120}$
(3) $4\frac{3}{5} : \frac{46}{15} = \frac{18}{23}$
(4) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{7}{12} = \frac{10}{7}$

Aufgabe 2:

Klammern Sie aus bzw ein

(1) $(2p + 3q) \cdot 5 = 10p + 15q$
(2) $2a(a^2 + 2ab) = 2a^3 + 4a^2b = 2a^2(a + 2b)$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die benötigen Massen der Ausgangslösungen:

(1) 5%-ige und $0,09$%-ige Kaliumdichromatlösung sollen zu $670\,g$ 4%-iger Kaliumdichromatlösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4-0{,}09}{5-4} = 3,91$$
$$m_2 = \frac{670\,g}{3{,}91+1} = 136,46\,g$$
$$m_1 = 533,54\,g$$

(2) 2%-ige und 70%-ige Chlorsäurelösung sollen zu $3,55\,kg$ $12,5$%-iger Chlorsäurelösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{70-12{,}5}{12{,}5-2} = 0,5\overline{3}$$
$$m_2 = \frac{3{,}55\,kg}{0{,}5\overline{3}+1} = 2,32\,kg$$
$$m_1 = 1,23\,kg$$

Aufgabe 4:

(1) $2x^6 + 4x^5 + \frac{3}{2}x^4 = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$
(2) $x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{-1, -4\}$

Aufgabe 5:

(1) $\frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x+2} = -2 \quad \mathbb{D} = \{-2, 3\}, \mathbb{L} = \{2\}$
(2) $6 + \sqrt{2x + 4} = 19 \quad \Rightarrow x = 82,5$
(3) $\sqrt{3x + 10} + 4 = x + 4 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$
(4) $4^x = 7 \quad \Rightarrow x = \frac{\log 7}{\log 4} \simeq 1,4$
(5) $\log\left(x^2 + 100\right) = 3 \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \{-30, 30\}$
(6) $2^{\ln x^2 - \ln x + 3} = 16 \quad \Rightarrow x = e$

Aufgabe 6:

(1) $\log_z c^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_z c$
(2) $\log_z \frac{5a^2x}{7by^2} = \log_z 5 + 2\log_z a + \log_z x - \log_z 7 - \log_z b = 2\log_z y$
(3) $\log_z (ab)^2 = 2\log_z a + 2\log_z b$
(4) $\log_z (a^2 + 2ab + b^2) = 2\log_z (a+b)$
(5) $\log_z (a-b)^2 = 2\log_z (a-b)$
(6) $\log_z (a^2 - b^2) = \log_z (a+b) + \log_z (a-b)$

Aufgabe 7:

In welcher Zeit wächst ein Kapital von 5 000 € bei 5% jährlicher Verzinsung auf 10 000 € an?

$$5\,000 \cdot 1,05^x = 10\,000$$
$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} \simeq 14,21$$

13. Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgabe 1:
Wodurch unterscheiden sich die Mengen $\{\}$ und $\emptyset$?
Gar nicht!

Aufgabe 2:
Beschreiben Sie die Mengen $A = \{x \mid x$ ist Student oder x ist älter als 40 Jahre$\}$ und $B = \{x \mid x$ ist Student und x ist älter als 40 Jahre$\}$.

Aufgabe 3:
Sei $A := \{1, 2, 5, 6, 12, 16, 18\}$ und $B := \{-1, 0, 2, 5, 6, 16\}$. Bestimmen Sie
(1) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 5, 6, 12, 16, 18\}$
(2) $A \cap B = \{2, 5, 6, 16\}$
(3) $A \backslash B = \{1, 12, 18\}$
(4) $B \backslash A = \{-1, 0\}$
(5) $2 \in A \cap B$
(6) $1 \in A$

Aufgabe 4:
Welches der folgenden Beispiele sind Mengen?
(1) $A = \{2, 3, 100\}$, ja
(2) $B = \{2, 3, 1, 2\}$, nein
(3) $C = \{\}$, ja
(4) $D = \{A, 1, C\}$, ja

Aufgabe 5:
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
(1) $4 \leq 4$, ja
(2) $6 > 7$, nein
(3) $6 < 7$,ja
(4) $1000 \geq 0$, ja
(5) $5 = 8$, nein

Aufgabe 6:
Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle und umgekehrt.
(1) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\} =]-\infty, 8[$
(2) $\{x \in \mathbb{R} \mid 8 \geq x > -4\} =]-4, 8]$
(3) $[12, 154] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 12 \leq x \leq 154\}$
(4) $]\infty, -100[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -100\}$

Aufgabe 8:

(1) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right) = 2\frac{17}{24} = \frac{65}{24}$

(2) $\frac{11}{13} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) = \frac{253}{260}$

(3) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

(4) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6} = \frac{7}{10}$

(5) $\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} = \frac{25}{19}$

Aufgabe 9:

Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach, welche der Zahlen sind gleich?

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{15}{3} = 5 < \frac{5\,001}{999} = 5,006.. < 5,3 < 5,333333 < 5,\overline{3} = 5\,\frac{1}{3}$$

Aufgabe 10:

(1) $19 - (+23) + (+11) + (-37) - (-16) = -14$

(2) $7 - [-5 - (-3)] - 4 + [3 - (-4) - 6] = 6$

Aufgabe 11:

(1) $3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-6) = -36$

(2) $(-5) \cdot 6 \cdot (-2) \cdot (-3) = -180$

Aufgabe 12:

(1) $\frac{7}{9} + \frac{5}{8} = \frac{101}{72} = 1\frac{29}{72}$

(2) $\frac{5}{12} - \frac{5}{6} = -\frac{5}{12}$

(3) $\frac{8}{24} - \frac{9}{45} = \frac{2}{15}$

(4) $\frac{1}{4} + \frac{11}{20} = \frac{4}{5}$

Aufgabe 13:

Wandeln Sie Brüche in Dezimalzahlen um und umgekehrt:

(1) $0,1 = \frac{1}{10}$

(2) $0,00002 = \frac{2}{10^5}$

(3) $\frac{5}{7} = 0,7143$

(4) $0,75 = \frac{3}{4}$

(5) $2\frac{12}{96} = 2\frac{1}{8} = 2,125$

Aufgabe 14:

Klammern Sie aus bzw ein

(1) $3a + 3b = 3(a + b)$
(2) $5x - 5y = 5(x - y)$
(3) $(e - 1)e = e^2 - e$
(4) $6(3x - 4y) + 5(2x - 3y) = 28x - 39y$

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die Massenverhältnisse:

(1) 7.5%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu 12,5%-iger Kalilauge gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{20-12{,}5}{12{,}5-7{,}5} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

(2) 37%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 11%-iger Salzsäure gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{11-2}{37-11} = \frac{9}{26}$$

(3) 10%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 7%-iger Salzsäure gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{7-2}{10-7} = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 16:

Berechnen Sie die benötigen Massen der Ausgangslösungen:

(1) 5%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu $750\,g$ 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{60-35}{35-5} = \frac{5}{6}$$
$$m_2 = \frac{750\,g}{\frac{5}{6}+1} = 409{,}1\,g$$
$$m_1 = 340\,g$$

(2) 16%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu $750\,g$ 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{60-35}{35-16} = 1{,}32$$
$$m_2 = \frac{750\,g}{1{,}32+1} = 323{,}86\,g$$
$$m_1 = 426{,}14\,g$$

(3) 12%-ige und 1,6%-ige Magnesiumchloridlösung sollen zu $1{,}8\,kg$ 10%-iger Magnesiumchloridlösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{10-1{,}6}{12-10} = 4{,}2$$
$$m_2 = \frac{1{,}8\,kg}{4{,}2+1} = 0{,}346\,kg$$
$$m_1 = 1{,}455\,kg$$

(4) $6,2\%$-ige und $0,09\%$-ige Kaliumdichromatlösung sollen zu $670\,g$ 4%-iger Kaliumdichromatlösung gemischt werden.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4-0,09}{6,2-4} = 1,78$$
$$m_2 = \frac{670\,g}{1,78+1} = 241,24\,g$$
$$m_1 = 428,76\,g$$

Aufgabe 17:

Berechnen Sie die Masse m und die Konzentration w der Mischung von

(1) $4\,kg$ 10%-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

$$m = 4\,kg + 1,3\,kg = 5,3\,kg$$
$$w = \frac{4\,kg \cdot 10\% + 1,3\,kg \cdot 37\%}{5,3\,kg} = 16,62\%$$

(2) $4\,kg$ $7,2\%$-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

$$m = 4\,kg + 1,3\,kg = 5,3\,kg$$
$$w = \frac{4\,kg \cdot 7,2\% + 1,3\,kg \cdot 37\%}{5,3\,kg} = 14,51\%$$

(3) $2,7\,kg$ 5%-tige und $275\,g$ 85%-tige und $1,06\,kg$ 14%-tige Phosphorsäure.

$$m = 2,7\,kg + 0,275\,kg + 1,06\,kg = 4,035\,kg$$
$$w = \frac{2,7 \cdot 5 + 0,275 \cdot 85 + 1,06 \cdot 14}{4,035}\% = 12,82\%$$

(4) $0,9\,kg$ $99,8\%$-tige und $440\,g$ $9,6\%$-tige und $88\,g$ 43%-tige Essigsäure.

$$m = 0,9\,kg + 0,44\,kg + 0,088\,kg = 1,428\,kg$$
$$w = \frac{0,9 \cdot 99,8 + 0,44 \cdot 9,6 + 0,088 \cdot 43}{1,428}\% = 68,52\%$$

(5) $0,9\,kg$ 55%-tige und $440\,g$ $9,6\%$-tige und $88\,g$ 43%-tige Essigsäure.

$$m = 1,428\,kg$$
$$w = \frac{0,9 \cdot 55 + 0,44 \cdot 9,6 + 0,088 \cdot 43}{1,428}\% = 40,27\%$$

(6) $650\,g$ $45,5\%$-tige und $1,2\,kg$ 10%-tige und $870\,g$ 15%-tige und $3,2\,kg$ 2%-tige Natronlauge.

$$m = 650\,g + 1,2\,kg + 879\,g + 3,2\,kg = 5,92\,kg$$
$$w = \frac{0,65 \cdot 45,5 + 1,2 \cdot 10 + 0,87 \cdot 15 + 3,2 \cdot 2}{5,92}\% = 10,31\%$$

Aufgabe 18:

Vereinfachen Sie (wenn möglich) die folgenden Ausdrücke

(1) $z^m \cdot z^{-m} = 1$

(2) $\frac{3^2 \cdot 2^3}{36} = 2$

(3) $x^{-3} : y^{-3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3$

(4) $x^5 : y^{-5} = (xy)^5$

(5) $\frac{p^{3m}}{p^{-4m}} = p^{7m}$

(6) $7^{-5} \cdot 7^8 = 7^3$

(7) $7^5 + 7^8 = 5,8 \cdot 10^6$

(8) $7^5 + 8^5 = 5 \cdot 10^4$

(9) $(a^4)^{-1} \cdot a^5 = a$

(10) $\frac{2,8^9 \cdot x^7 \cdot y^2}{2,8^{12} \cdot y^4 \cdot x^5} = 2,8^{-3} x^2 y^{-2}$

Aufgabe 19:

Mit Taschenrechner, auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

(1) $2,41^2 = 5,81$

(2) $(-3,5)^2 = 12,25$

(3) $(-3,5)^3 = -42,88$

(4) $(3,5 - 2,7^2)^3 = -54,44$

(5) $\frac{1,9^3 + 5,2^5}{2^6} = 59,51$

(6) $\frac{(-4,2)^3 \cdot 9,1}{1,45^6} = -72,54$

(7) $(5,52 + 1,75)^3 + (6,24 + 4,23)^2 = 493,86$

Aufgabe 20:

Vereinfachen Sie und verwenden Sie Zehnerpotenzen

(1) $\sqrt{287\,296\,000\,000} = 536 \cdot 10^3$

(2) $\sqrt{0,000\,006\,25} = 2,5 \cdot 10^{-3}$

(3) $\sqrt{0,000\,062\,5} = 7,91 \cdot 10^{-3}$

(4) $\sqrt{0,000\,000\,27} = 3^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{-4}$

(5) $\sqrt[4]{24\,010\,000} = 70$

(6) $\sqrt{3\,422\,500} = 1850$

Aufgabe 21:

(1) $\sqrt{0,01} = 0,1$

(2) $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$

(3) $27^{\frac{1}{3}} = 3$

(4) $4,24 - \sqrt{7} = 1,59$

(5) $\sqrt{0,000004} = 2 \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 22:

Vereinfache die folgenden Terme

(1) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = 16^{-\frac{1}{3}}$

(2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5^2}{2^3 \cdot 3}\right)^{\frac{3}{4}}$

(3) $\pi^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{8\pi}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$

(4) $\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{15}}$

(5) $\sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}}$

(6) $\sqrt[3]{125} = 5$

(7) $\sqrt{\frac{20}{3}}\sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{5}{3}$

Aufgabe 23:

(1) $9^2 + 16^2 = 337$

(2) $(9 + 16)^2 = 625$

(3) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

(4) $\sqrt{9 + 16} = 5$

(5) $\sqrt{9^2 + 16^2} = 18,36$

Aufgabe 24:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich (Ohne Taschenrechner!)

(1) $\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{27} = 6$

(2) $\frac{\sqrt{18}\sqrt{4}\sqrt{2{,}3}}{\sqrt{5{,}3}} = \sqrt{\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2{,}3}{5{,}3}}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{24} = 3$

(4) $\frac{\sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 8}}{\sqrt{0{,}5}} = \frac{8}{5}\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 25:

Berechnen Sie auf 2 Dezimalstellen genau

(1) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} = 2,24$

(2) $\frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{25}}{7} = -0,44$

(3) $\frac{-\sqrt{60} - 5\sqrt{90}}{\sqrt{2560}} = -1,09$

(4) $3\sqrt{200} - 5\sqrt{7} = 29,2$

(5) $\frac{8\sqrt{200} - 2\sqrt{8}}{0{,}2} = 537,4$

(6) $\frac{\sqrt{300} + \sqrt{38}}{\sqrt{57}} = 3,11$

Aufgabe 26:

(1) $(p + q)(p + q) = p^2 + 2pq + q^2$

(2) $(15r + 13)(15r + 13) = 225r^2 + 450r + 169$

(3) $(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

(4) $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$

(5) $(2m+3n)(2m+3n) = 4m^2 + 12mn + 9n^2$
(6) $(3x+2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 9y^2$
(7) $(a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4$

Aufgabe 27:

(1) $(p-q)(p-q) = p^2 - 2pq + q^2$
(2) $(15r-13)(15r-13) = 225r^2 - 450r + 169$
(3) $(x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$
(4) $(r-s)^2 = r^2 - 2rs + s^2$
(5) $(2m-3n)(2m-3n) = 4m^2 - 12mn + n^2$
(6) $(3x-2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

Aufgabe 28:

(1) $(p-q)(p+q) = p^2 - q^2$
(2) $(15r+13)(15r-13) = 225r^2 - 169$
(3) $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$
(4) $(r-s)(s+r) = r^2 - s^2$
(5) $(2m+3n)(2m-3n) = 4m^2 - 9n^2$
(6) $(3x+2y)(3x-2y) = 9x^2 - 4y^2$

Aufgabe 29:

(1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$
(2) $(x+y)(x+y)(x-y)(x-y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
(3) $(p+q)^2(p-q)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4$
(4) $m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2$
(5) $uv - u^2 + uw = u(v - u + w)$
(6) $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$
(7) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
(8) $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$
(9) $a^2 + 14a + 49 = (a+7)^2$
(10) $p^2 + 2pq + q^2 - r^2 = (p+q)^2 - r^2 = (p+q+r)(p+q-r)$
(11) $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$

Aufgabe 30:

Berechnen Sie ohne Taschenrechner

(1) $\log_{10} 100 = 2$
(2) $\log_2 8 = 3$
(3) $\log_{10} 1000 = 3$
(4) $\log_2 0,125 = \log_2 2^{-3} = -3$
(5) $\log_3 9 = 2$
(6) $\log_2 16 = 4$

Aufgabe 31:

(1) $\ln 5 = 1,61$
(2) $\ln 500 = 6,21$

(3) $\ln 0,1 = -2,3$
(4) $\ln e^2 = 2$
(5) $\ln e^{-1} = -1$
(6) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$
(7) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 32:
Berechnen Sie ohne Taschenrechner (Hinweis: $\lg 2 = 0,301$)
(1) $\lg 200 = 2,301$
(2) $\lg 0,2 = -0,699$
(3) $\lg 10 = 1$

Aufgabe 33:
Lösen Sie die folgenen Gleichungen (ohne Taschenrechner):
(1) $2^x = 32 \Leftrightarrow x = 5$
(2) $10^x = 10000 \Leftrightarrow x = 4$
(3) $10^y = 20 \Leftrightarrow y = \lg 20 = 1,301$
(4) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 0$
(5) $2^z = 1024 \Leftrightarrow z = 10$

Aufgabe 34:
Man berechne mit Hilfe des Taschenrechners
(1) $\log_7 13 = 1,32$
(2) $\log 111 = 2,045$
(3) $\log_{12} \sqrt{3} = 0,221$
(4) $\ln 3 = 1,1$
(5) $\ln\big(2^6\big) = 4,159$

Aufgabe 35:
(Eingangstest)
(1) $\log_2 8 = 3$
(2) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$
(3) $\log_4(2 \cdot 4) = \log_4 2 + \log_4 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
(4) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$
(5) $\log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$
(6) $\log_2(4\sqrt{2}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
(7) $\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2}$
(8) $\log_7 7^3 = 3$
(9) $\log_7 7^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

Aufgabe 36:

Aus dem Rechenbuch des Inders Bhaskara (ca.1150 n.Chr.):
Von einem Schwarm Bienen läßt sich ein Fünftel auf einer Kadamabablüte, ein Drittel auf einer Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja; eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und her schwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandanus. Sage mir nun die Anzahl der Bienen.

$$\begin{aligned} x &= \#\text{Bienen} \\ x &= \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{3}x + 3\big(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{5}x\big) + 1 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Aufgabe 37:

(1) $\frac{x}{c} - b = a \;\Leftrightarrow\; x = (a+b)c$
(2) $\frac{x}{p} + 1 = \frac{q}{p} \;\Leftrightarrow\; x = q - p$
(3) $cx - d = x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{d}{c-1}$
(4) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2 \;\Leftrightarrow\; x = a + b$
(5) $(p+x)(q+x) = (p-x)(q-x)$
$\quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \text{ oder } p = -q$
(6) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{b} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{a+b}{a-b}$
(7) $x(a-b) = a(b-x) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{ab}{2a-b}$
(8) $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = m - n \;\Leftrightarrow\; x = -nm$
(9) $ax - bx = cx \;\Leftrightarrow\; a - b - c = 0 \,\text{oder}\, x = 0$

Aufgabe 38:

(1) $(x+5)^2 = (7-x)^2 + 24 \;\Leftrightarrow\; x = 2$
(2) $(x+9)^2 = (x-5)^2 \;\Leftrightarrow\; x = -2$
(3) $5(2x+1)^2 - 4(2x-1)^2 = 4x(x+8) \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{4}$
(4) $7x - 42 = 6x + 12 \;\Leftrightarrow\; x = 54$

Aufgabe 39:

(1) $\frac{16}{1-x} = 4 \;\Leftrightarrow\; x = -3$
(2) $\frac{3x+4}{x} - \frac{2x}{x+1} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{2}{3}$
(3) $\frac{15}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{33}{11} = -3$
(4) $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-3} \;\Leftrightarrow\; x = 9$

Aufgabe 40:

(1) $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-1} \;\Leftrightarrow\; x = -8$
(2) $\frac{15}{2x+1} - \frac{20}{3x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$
(3) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{2-x}{6-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 18$
(4) $\frac{3x-7}{x-4} = \frac{5x-5}{x+7} - 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{25}{9}$

Aufgabe 41:

(1) $(x-12)(x+12)=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 12$
(2) $(x-12)(x+12)=25 \Leftrightarrow x^2=13^2 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 13$
(3) $(18x+7)(18x-7)=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{7}{18}$
(4) $(x-5)(x+5)=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 5$
(5) $(x-5)(x+5)=-9 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 4$
(6) $(18x+7)(18x-7)-32=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$
(7) $(x-3)(x+2)+x=19 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 5$

Aufgabe 42:

(1) $\sqrt{x^2-x+0,25}=0 \Leftrightarrow x=0,5$
(2) $x^2-x+0,25=0 \Leftrightarrow x=0,5$
(3) $\sqrt{6,25x^2+2x+0,16}=0 \Leftrightarrow (2,5x+0,4)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{25}$
(4) $6,25x^2+2x+0,16=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{25}$

Aufgabe 43:

(1) $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$
(2) $(x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4$
(3) $x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow x=4$
(4) $x(x-4)=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=4$
(5) $x^2-4x=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=4$
(6) $x^2=4x \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=4$
(7) $x^2=7x \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=7$
(8) $x^2=-7x \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-7$
(9) $x^2=4 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2$
(10) $x^2=9 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 3$
(11) $x^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{3}$
(12) $x^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{2}{3}$
(13) $x^2-\frac{4}{9}=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{2}{3}$
(14) $5x^2=75 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{15}$
(15) $x^2-0,9=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{0,9}=\pm 3\cdot 10^{-\frac{1}{2}}$
(16) $x^2-(-4)^2=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2$
(17) $64x^2=2916 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{27}{4}$

Aufgabe 44:

(1) $\frac{x}{12}=\frac{12}{x} \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 12$
(2) $\frac{3}{x}-\frac{x}{8}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 4$
(3) $\frac{12}{x^2}=\frac{10}{x^2-6} \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 6$
(4) $\frac{2x-4}{3(x+2)}=\frac{x-2}{2x+4} \Leftrightarrow x_{1/2}=2$

Aufgabe 45:

(1) $x^2=64 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 8$
(2) $x^2=0,01 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 0,1$

(3) $3x^2 = 147 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 7$
(4) $6x^2 = 0,015 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 0,05$
(5) $64x^2 = 625 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{25}{8}$
(6) $x^2 - 324 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 18$
(7) $x^2 - 1,21 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1,1$
(8) $x(x+7) = 7(x+28) \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 14$

Aufgabe 46:

(1) $\sqrt{2x+4} = 12 \Leftrightarrow x = 70$
(2) $\sqrt{x-4} = -6 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\}$
(3) $\sqrt{2x} + 40 = x \Leftrightarrow x = 50$
(4) $\sqrt{x} + \sqrt{5+x} = 5 \Leftrightarrow x = 4$
(5) $\sqrt{3x-5} + \sqrt{5x+1} = 2 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\}$
(6) $\sqrt{ax} + \sqrt{\frac{x}{a}} = 1 + a \Leftrightarrow x = a$ am besten Raten!
(7) $\sqrt{2+\sqrt{7x+1}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 5$
(8) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = x + 3 \Leftrightarrow x = 25$
(9) $\sqrt{x} + \sqrt{x-n} = n \Leftrightarrow x = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$
(10) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x+3} = \sqrt{2x+21} \Leftrightarrow x = 2$

Aufgabe 47:

(1) $\log_2 x = 1,5 \Leftrightarrow x = 2^{\frac{3}{2}}$
(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1,5 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 0,35$
(3) $\log_2 x = -1,5 \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{3}{2}} = \ bigl(\frac{1}{2}\Bigr)^{\frac{3}{2}} \simeq 0,35$
(4) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1,5 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \simeq 2,83$
(5) $\log_x 0,25 = 2 \Leftrightarrow 0,25 = x^{\log_x 0,25} = x^2 \Leftrightarrow x = 0,5$
(6) $\log_x 8 = -3 \Leftrightarrow 8 = x^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
(7) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$
(8) $\log_4 x = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} = \{\}$

Aufgabe 48:

(1) $4^{x+1} = 16 \Leftrightarrow x = 1$
(2) $2 \cdot 8^{x+1} = 16^{x+3} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-8} \Leftrightarrow x = -8$
(3) $4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x-1} \Leftrightarrow x = 3$
(4) $19^{x-1} = 7^{2x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{19}{7^2}\right)^x = 19 \cdot 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{19}{7^2}}(19 \cdot 7) = \frac{\log(19 \cdot 7)}{\log\left(\frac{19}{7^2}\right)} \simeq -5,16$
(5) $3^{\frac{1}{x}} = 17^{\frac{4}{2x+3}} \Leftrightarrow x = \frac{3 \lg 3}{4 \lg 17 - 2 \lg 3} \simeq 0,36$
(6) $10^{\lg x} = 1000 \Leftrightarrow x = 1000$
(7) $3^{x+2} = \frac{1}{81} = 9^{-2} = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -6$
(8) $4^{2x} = \frac{1}{16} = 4^{-2} \Leftrightarrow x = -1$
(9) $3^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0, (\ z = 3^x), \Leftrightarrow z^2 - 12z + 27 = (z-3)(z-7) = 0, \Leftrightarrow z_1 = 3,\ z_2 = 7, \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \log_3 7$

(10) $3 \cdot 3^x - 36 \cdot 3^{-x} + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\, x_2 = \log_3(-4)$
(11) $2^{x+3} - 2^{2-x} + 31 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3,\, x_2 = \log_2(-4)$

Aufgabe 49:

Sie erben 35 000 € und legen diese zu einem Zinssatz von 7% p.a. fest an. Wann hat sich Ihr Kapital auf 50 000 € erhöht?

$$35\,000 \cdot 1,07^x = 50\,000 \qquad \text{(nach } x \text{ Jahren)}$$
$$1,07^x = \tfrac{50\,000}{35\,000} = \tfrac{10}{7}$$
$$x = \log_{1,07}\tfrac{10}{7} = \frac{\log \frac{10}{7}}{\log 1,07} \simeq 5,27$$

Aufgabe 50:

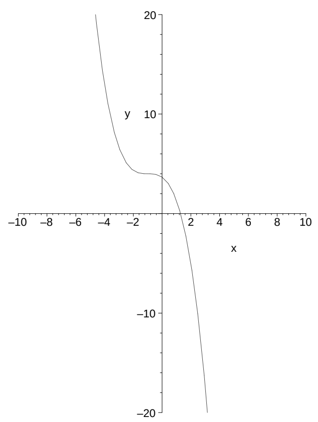
Berechnen Sie die erste Ableitung

(1) $f(x) = 3\sin^2 x, \quad f'(x) = 2\sin x \cos x$
(2) $f(x) = 4x^6, \quad f'(x) = 24x^5$
(3) $f(x) = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$
(4) $f(x) = e^{2+x}, \quad f'(x) = e^{2+x}$
(5) $f(x) = e^{2x}, \quad f'(x) = 2e^{2x}$
(6) $(f(x) = \sqrt[3]{x^7}, \quad f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$
(7) $f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad f'(x) = \frac{-1}{x \ln^2 x}$
(8) $f(x) = \log\sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2x \ln 10}$
(9) $f(x) = \left(x^5 - 8x^2 + 5x\right)^{12}, \quad f'(x) = 12(x^5 - 8x^2 + 5x)(5x^4 - 16x + 5)$
(10) $f(x) = \frac{2x^2+x^4}{(x-1)^2}, \quad f'(x) = \frac{(4x+4x^3)(x-1)^2 - 2(2x^2+x^4)(x-1)}{(x-1)^4}$

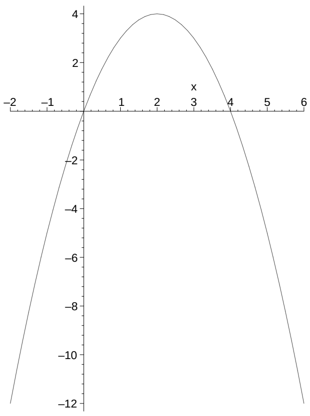
Aufgabe 51:

Bestimmen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

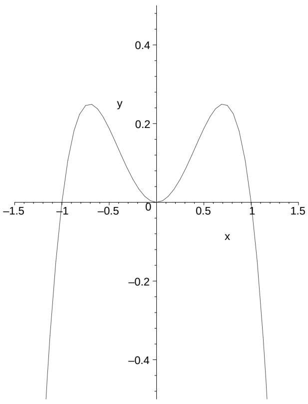
(1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}(x+1)^3$



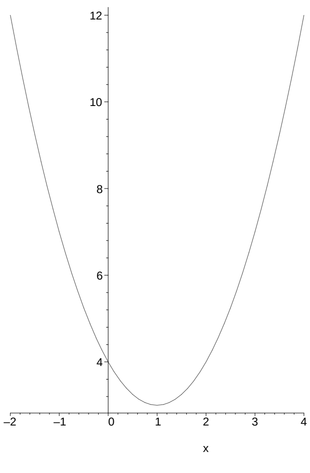
(2) $f(x) = -x^2 + 4x$



(3) $f(x) = x^2 - x^4$



(4) $f(x) = (x-1)^2 + 3$



MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG, BISMARCKSTRASSE $1\frac{1}{2}$, D-91054 ERLANGEN, GERMANY
E-mail address: `birkenhake@mi.uni-erlangen.de, christina@birkenhake.net`
URL: `http://www.mi.uni-erlangen.de/~birken/`