MATHEMATIK MTA 13
SCHULJAHR 06/07

PROF. DR. CHRISTINA BIRKENHAKE

Inhaltsverzeichnis

christina@birkenhake.net, http://christina.birkenhake.net .

1. Potenzen und Wurzeln

1.1. **Potenzen mit ganzen Exponenten.**

Potenzen einer Zahl:

$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Für den Term a^n heißt a die *Basis* und n der *Exponent* oder *Hochzahl.*

Spezielle Potenzen:

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

1.2. **Potenzen mit negativen Exponenten.**

Potenzen mit negativem Exponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} a^{-1} &= \tfrac{1}{a} \\ a^{-n} &= \tfrac{1}{a^n} \end{aligned}}$$

Beispiele:

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4^3} = 4^{-3}$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^{-2} = \tfrac{1}{10^2} = \tfrac{1}{100} = 0,01$$

Rechenregeln für Potenzen:

$$\boxed{\begin{aligned} & a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ & \tfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ & \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \\ & a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \\ & \tfrac{a^n}{b^n} = \left(\tfrac{a}{b}\right)^n \end{aligned}}$$

Beispiele:

$$4^{-2} \cdot 4^7 = 4^{7-2} = 4^5 = 1024$$
$$4^{-5} \cdot a^{-5} = (4a)^{-5} = \tfrac{1}{(4a)^5} = \left(\tfrac{1}{4a}\right)^5$$
$$(z-2)^3 \cdot (z+2)^3 = \big((z-2) \cdot (z+2)\big)^3 = (z^2-4)^3$$
$$\left(3^2\right)^{-7} = 3^{2 \cdot (-7)} = 3^{-14} = 2,1 \cdot 10^{-7}$$

Zehnerpotenzen:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &10^{-2} = 0,01 \\ &10^{-1} = 0,1 \\ &10^{0} = 1 \\ &10^{1} = 10 \\ &10^{2} = 100 \\ &10^{3} = 1000 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiele: $342,1 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$

$5\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$

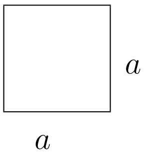
$6,0221367 \cdot 10^{23} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ Avogadrosche Konstante

Beispiele: (Einheiten umrechnen)

$$1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm} \;\Rightarrow\; 1\,\mathrm{dm}^2 = (10\,\mathrm{cm})^2 = 10^2\,\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{cm}^2$$

Ähnliches in Aufgabenblatt 8 Aufgabe 3

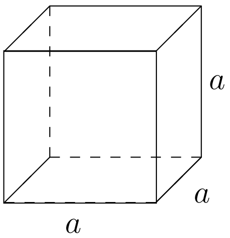
1.3. **Potenzen mit rationalen Exponenten.**



Quadrat mit Seitenlänge a
Fläche: $A = a \cdot a = a^2$

Sei $A = 9\,\mathrm{cm}^2 \qquad \Rightarrow \; a = ? = \sqrt{9\,\mathrm{cm}^2} = 3\,\mathrm{cm}$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{A} = \sqrt[2]{A}$$



Würfel mit Seitenlänge a
Volumen: $V = a^3$

Sei $V = 125\,\mathrm{cm}^3 \qquad \Rightarrow \; a = ? = \sqrt[3]{125\,\mathrm{cm}^3} = 5\,\mathrm{cm}$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{V}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \text{ ist die positive Lösung von } x^n = a}$$

Der Term $\sqrt[n]{a}$ heißt *n-te Wurzel aus a*. Im Fall $n = 2$, also $\sqrt{a}$, spricht man auch von der *Quadratwurzel*. Für den Term $\sqrt[n]{a}$ heißt a der *Radikant*. Der Radikant darf nicht negativ sein, also $a \geq 0$.

Potenzen mit rationalen Exponenten:

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad \ldots \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Für die Potenzen mit rationalen Exponenten gelten die gleichen Rechenregeln wie oben.

Beispiele: $\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} \simeq 2,378$ (Taschenrechner)

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{8}^2 = \sqrt[3]{2^3}^2 = 2^2 = 4$

$2^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \simeq 0,397$ (Taschenrechner)

Rechenregeln für Wurzeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \end{array}}$$

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Vereinfachen Sie (wenn möglich) die folgenden Ausdrücke

a) $z^m \cdot z^{-m}$

b) $\frac{3^2 \cdot 2^3}{36}$

c) $x^{-3} : y^{-3}$

d) $x^5 : y^{-5}$

e) $\frac{p^{3m}}{p^{-4m}}$

f) $7^{-5} \cdot 7^8$

g) $7^5 + 7^8$

h) $7^5 + 8^5$

i) $(a^4)^{-1} \cdot a^5$

j) $\dfrac{2,8^9 \cdot x^7 \cdot y^2}{2,8^{12} \cdot y^4 \cdot x^5}$

Aufgabe 2:
Klammern Sie aus bzw. ein.

a) $x \cdot x \cdot x \cdot x$

b) $x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}$

c) $x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot y^{-1}$

d) $(x \cdot y)^2$

e) $(x^{-2}y^2)^{-2}$

f) $-(x^0y) \cdot (x^0y) \cdot (x^0y)$

Aufgabe 3:

a) $\dfrac{x^4}{x^3}$

b) $\dfrac{y^{4n}}{y^{2n}}$

c) $\dfrac{a^x \cdot b^{x+y}}{a^{2x-y} \cdot b^{x-y}}$

d) $\dfrac{x^{k-1} \cdot y^{2k+1}}{x^{-k} \cdot y^{2k-2}}$

Aufgabe 4:

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt[4]{32}$

c) $8^{\frac{2}{3}}$

d) $2^{-\frac{4}{3}}$

Aufgabe 5:
Vereinfachen Sie die folgenden Terme

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$

b) $(\dfrac{4}{5})^{-\frac{3}{4}} \cdot (\dfrac{5}{6})^{\frac{3}{4}}$

c) $\pi^{\frac{1}{3}} : (\dfrac{8\pi}{125})^{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a}\right)^{\frac{1}{4}}$

e) $\sqrt{125}$

f) $\sqrt[3]{125}$

g) $\sqrt{\dfrac{20}{3}}\sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Masse eines Stoffes	(m)	Einheit kg bzw g
Volumen eines Stoffes	(V)	Einheit l = Liter oder m^3
		$1000\,l = 10^3\,l = 1\,\mathrm{m}^3$
Stoffmenge	(n)	Einheit *mol*

Definition 2.1. 1 mol *ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in* 12 *g des Kohlenstoffnuklids* ^{12}C*.*

Die Anzahl der Teilchen in 1 mol eines jeden Stoffes ist gleich.
D.h. zum Beispiel: die Anzahl der Teilchen in 1 mol Eisen (Fe) ist gleich der Anzahl von Teilchen in 1 mol Wasser (H_2O). Diese Anzahl wird angegeben durch die:
Avogadrosche Konstante: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

Beispiel 1. Gegeben sei 2 mol H_2O Wasser, d.h.: $n(H_2O) = 2\,\mathrm{mol}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Anzahl der Teilchen/Moleküle} &= n(H_2O) \cdot N_A \\ &= 2\,\mathrm{mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \\ &\simeq 12 \cdot 10^{23}\end{aligned}$$ □

Frage: Wieviel Moleküle sind in 3 mol $NAOH$?

Molare Masse eines Stoffes $(M) = \frac{\text{Masse}}{\text{Stoffmenge}}$ also $M = \frac{m}{n}$ Einheit $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$
Die Molare Masse findet man im **Periodensystem:**

Wasserstoff	H	$M(H) = 1,008\,\mathrm{g/mol}$
Sauerstoff	O	$M(O) = 16\,\mathrm{g/mol}$

Damit berechnet sich die Molare Masse bei Molekülen:

Beispiel 2.

$$\begin{aligned}\text{Wasser}\,(H_2O): \quad M(H_2O) &= 2M(H) + M(O) \\ &= 2 \cdot 1,008\,\mathrm{g/mol} + 16\,\mathrm{g/mol} \\ &= 18,016\,\mathrm{g/mol}\end{aligned}$$

D.h. 1 mol Wasser wiegt ungefähr 18 g. □

Beispiel 3.

$$\text{Sauerstoff}\,(O_2): \quad M(O_2) = 2M(O) = 2 \cdot 16\,\mathrm{g/mol} = 32\,\mathrm{g/mol}$$

Beispiel 4. Calciumcarbonat $CaCO_3$:

$$\begin{aligned}M(CaCO_3) &= M(Ca) + M(C) + 3M(O) \\ &\quad 40\,\mathrm{g/mol} + 12\,\mathrm{g/mol} + 3 \cdot 16\,\mathrm{g/mol} = 100\,\mathrm{g/mol}\end{aligned}$$

Molare Masse, Masse und Stoffmenge

$$\begin{aligned} \text{Molare Masse} \quad M &= \frac{m}{n} \\ \text{Stoffmenge} \quad n &= \frac{m}{M} \\ \text{Masse} \quad m &= nM \end{aligned}$$

Beispiel 5. Gegeben seien 100 g Kupfer (Cu). Berechne die Stoffmenge.
$m(Cu) = 100\,\text{g}, \quad M(Cu) = 64\,\text{g/mol}$

$$\Rightarrow n(Cu) = \frac{m(Cu)}{M(Cu)} = \frac{100\,\text{g}}{64\,\text{g/mol}} = 1{,}6\,\text{mol}$$

mit Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 64\,\text{g}\ Cu & \text{sind} & 1\,\text{mol} \\ 100\,\text{g}\ Cu & \text{sind} & x\,\text{mol} \end{array} \Rightarrow x\,\text{mol} = \tfrac{100\,\text{g} \cdot 1\,\text{mol}}{64\,\text{g}} = 1{,}6\,\text{mol}$$ □

Beispiel 6. Gegeben seien 0,43 mmol Natrium (Na), also

$$\begin{aligned} n(Na) =& 0{,}43\,\text{mmol} = 0{,}43 \cdot 10^{-3} mol \\ M(Na) =& 23\,\text{g/mol} \\ \Rightarrow \quad m(Na) =& n(Na) \cdot M(Na) \\ =& 0{,}43 \cdot 23 \cdot 10^{-3} g = 9{,}89 \cdot 10^{-3} g = 9{,}89\,\text{mg} \end{aligned}$$

Mit Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 1\,\text{mol}\ Na & \text{wiegen} & 23\,\text{g} \\ 0{,}43\,\text{mol}\ Na & \text{wiegen} & x\,\text{g} \end{array} \Rightarrow x\,\text{g} = \tfrac{0{,}43\,\text{mol} \cdot 23\,\text{g}}{1\,\text{mol}} = 9{,}89\,\text{mg}$$ □

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Berechne die Molare Masse von:

a) Aluminiumoxid Al_2O_3,

b) Phenol C_6H_5OH,

c) Nitrobenzol $C_6H_5NO_2$,

d) Sauerstoff O_2,

e) Stickstoff N_2,

f) Natriumhydrogencarbonat $NaHCO_3$,

g) Magnesiumammoniumphosphat-6-hydrat $Mg(NH_4)PO_4 \cdot 6H_2O$,

h) Harnstoff $CO(NH_2)_2$,

Aufgabe 2:
Berechne die Stoffmenge von:

a) $1,118\,\mathrm{mg}$ Silber Ag ,

b) $35\,\mathrm{kg}$ Aluminium Al,

c) $65\,\mathrm{g}$ Wasserstoff H_2,

d) $90\,\mathrm{mg}$ Kohlenstoff C,

e) $16,5\,\mathrm{kg}$ Iod I_2,

Aufgabe 3:
Berechne die Masse von:

a) $3,5\,\mathrm{mol}$ Cobalt Co,

b) $0,2\,\mathrm{mmol}$ Uran U,

c) $4,1\,\mathrm{mol}$ Chlor Cl_2,

d) $51\,\mathrm{mol}$ Wasserstoff H_2,

e) $1,83\,\mathrm{mol}$ Mangan Mn,

3. Mischungsrechnen

3.1. Massenanteile.

Was bedeutet: 10%tige wässrige Salzsäure Lösung ?

Die Lösung ist eine Mischung aus Wasser und Salzsäure so daß in 100 g Lösung 10 g Salzsäure und 100 g −10 g = 90 g Wasser sind.

Massenanteil (=Konzentration) (w) eines Stoffes in einer Lösung:

$$w = w(\text{g.S.}) = \frac{m(g.S.)}{m(L)} \,(\cdot 100\%) \tag{1}$$

Hierbei meint $g.S.$ =gelöster Stoff, L die Lösung und $m(L)$ die Gesamtmasse der Lösung.

Beispiel 7. Was bedeutet: $7,8\%$ige Kochsalzlösung?

$w = w(NaCL) = 7,8\%$, also enthalten 1 kg Lösung gerade $1\,\text{kg} \cdot w = 1\,\text{kg} \cdot 7,8 \cdot \frac{1}{100} = 78\,\text{g}$ Kochsalz. □

Beispiel 8. Wieviel Kochsalz sind in 500 g $7,8\%$iger Kochsalzlösung? $m(NaCl) = w \cdot m(L) = 7,8 \cdot \frac{1}{100} \cdot 500\,\text{g} = 39\,\text{g}$ □

Beispiel 9. $8,5\,\text{g}$ Zucker sollen in Wasser zu 2%iger Zuckerlösung aufgelöst werden. Wieviel Wasser brauchen wir, wieviel Zuckerlösung erhalten wir?

gegeben: $w = 2\%$, $\quad m(Zucker) = 8,5\,\text{g}$,

gesucht: $m(L)$ und $m(H_2O)$.

$$\begin{aligned} m(L) &= \frac{m(g.S.)}{w} = \frac{8,5\,\text{g}}{2\frac{1}{100}} = 425\,\text{g} \\ m(H_2O) &= m(L) - m(Zucker) = 425\,\text{g} - 8,5\,\text{g} = 416,5\,\text{g} \end{aligned}$$

Mit Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 2\,\text{g Zucker} & \text{in} & 100\,\text{g Lösung} \\ 8,5\,\text{g Zucker} & \text{in} & x \text{ Lösung} \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{8,5\,\text{g}\cdot 100\,\text{g}}{2\,\text{g}} = 425\,\text{g}$$ □

Wie man an den Beispielen sieht ist die Formel (1) für den Massenanteil auch in anderer Form wichtig:

$$w(g.S.) = \frac{m(g.S.)}{m(L)} \tag{2}$$

$$m(L) = \frac{m(g.S.)}{w(g.S.)} \tag{3}$$

$$m(g.S.) = w(g.S.) \cdot m(L) \tag{4}$$

Beispiel 10. Wieviel Bariumhydroxid ($Ba(OH)_2$) sind in $103,48\,\text{g}$, $3,36\%$igem Barytwasser (wässrige Bariumhydroxidlösung)?

$$m(Ba(OH)_2) = w \cdot m(L) = 3,36 \cdot \frac{1}{100} \cdot 103,48\,\text{g} = 3,48\,\text{g} \quad \square$$

3.2. **Mischen von Lösungen.**

Beispiel 11. (Blatt 15, Aufgabe 1) 300 g Salpetersäure der Konzentration 60% (Lösung L_1) und 150 g Salpeters. der Konzentration 20% (Lösung L_2) werden zu einer Lösung L gemischt. Welche Konzentration bzw. Masse hat L?

$$\begin{array}{lllll}
L_1: & m_1 = 300\,\mathrm{g} & w_1 = 60\% & m(S_1) = & m_1 w_1 & = 300\,\mathrm{g}\,\frac{60}{100} = 180\,\mathrm{g} \\
+ & + & & & + & \\
L_2: & m_2 = 150\,\mathrm{g} & w_2 = 20\% & m(S_2) = & m_2 w_2 & = 150\,\mathrm{g}\,\frac{20}{100} = 30\,\mathrm{g} \\
\hline
L: & m = 450\,\mathrm{g} & & m(S) = & m_1 w_1 + m_2 w_2 & = 210\,\mathrm{g}
\end{array}$$

Das läßt sich in einer Formel zusammenfassen:

$$w(L) = \frac{m(S_1) + m(S_2)}{m(L)} = \frac{w(L_1)m(L_1) + w(L_2)m(L_2)}{m(L_1) + m(L_2)}$$

Mischungsformel:

Lösung L_1 habe die Masse m_1 und den Massenanteil w_1,
Lösung L_2 habe die Masse m_2 und den Massenanteil w_2, und die Mischung L aus L_1 und L_2 habe die Masse m und den Massenanteil w.
Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl}
\textit{Lösungen:} & \textit{Lösung } L_1 & + & \textit{Lösung } L_2 = \textit{Lösung } L \\
\textit{Massen:} & m_1 & + & m_2 = m \\
\textit{Masse g. S.:} & w_1 m_1 & + & w_2 m_2 = wm
\end{array}$$

Beispiel 12. Sie mischen $4\,kg$ 10%ige Salzsäure mit $1,3\,kg$ 37%iger Salzsäure. Was erhalten Sie?

$$m = m_1 + m_2 = 4\,kg + 1,3\,kg = 5,3\,kg$$
$$w = \frac{w_1 m_1 + w_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4\,kg \cdot 10\% + 1,3\,kg \cdot 37\%}{5,3\,kg} = 16,6\%$$

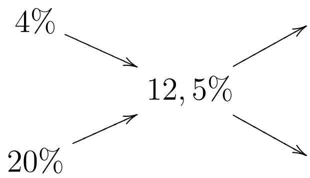
□

3.3. **Mischungsverhältnis.**

Beispiel 13. 4%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu $12,5$%-iger Kalilauge gemischt werden. Man bestimme das benötigte Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$.
Lösung:
Masse von L_i ist m_i. Dann ist die Masse m von der Mischung L, $m = m_1 + m_2$ und es gilt:

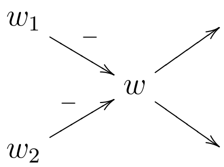
$$\begin{aligned} 4\% m_1 + 20\% m_2 &= 12,5\%(m_1 + m_2) && \Big| \cdot \tfrac{1}{m_2} \cdot \tfrac{1}{\%} \\ 4\tfrac{m_1}{m_2} + 20 &= 12,5\Big(\frac{m_1}{m_2} + 1\Big) \\ 20 - 12,5 &= (12,5 - 4)\frac{m_1}{m_2} \\ \tfrac{m_1}{m_2} &= \frac{|w_2 - w|}{|w - w_1|} = \tfrac{20-12,5}{12,5-4} = \tfrac{15}{17} \end{aligned}$$

Das Massenverhältnis ist $\frac{m_1}{m_2} = \frac{15}{17}$, also 15 Teile L_1 und 17 Teile L_2 werden benötigt.
Mischungskreuz:



$$\frac{|20 - 12,5|}{|12,5 - 4|} = \frac{m_1}{m_2}$$

Mischungskreuz allgemein:



$$\frac{|w_2 - w|}{|w - w_1|} = \frac{m_1}{m_2}$$

□

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:

Berechne Masse und Massenanteil des gelösten Stoffes in der Mischung von

a) $4\,kg$ 10%-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

b) $4\,kg$ $7,2$%-tige und $1,3\,kg$ 37%-tige Salzsäure.

c) $2,7\,kg$ 5%-tige und 275 g 85%-tige und $1,06\,kg$ 14%-tige Phosphorsäure.

d) $0,9\,kg$ $99,8$%-tige und 440 g $9,6$%-tige und 88 g 43%-tige Essigsäure.

e) $0,9\,kg$ 55%-tige und 440 g $9,6$%-tige und 88 g 43%-tige Essigsäure.

f) 650 g $45,5$%-tige und $1,2\,kg$ 10%-tige und 870 g 15%-tige und $3,2\,kg$ 2%-tige Natronlauge.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Massenverhältnisse, wie muss gemischt werden?

a) $7,5$%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu $12,5$%-iger Kalilauge gemischt werden.

b) 37%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 11%-iger Salzsäure gemischt werden.

c) 10%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 7%-iger Salzsäure gemischt werden.

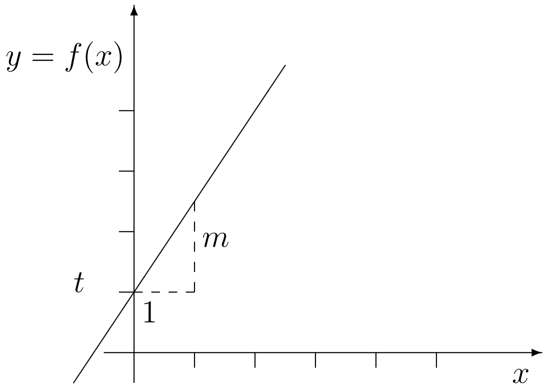
4. Lineare Gleichungen und lineare Funktionen

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Was fällt auf:

	y-Achsenabschnitt
$f(x) = 2x - 1$	
$f(x) = 2x$	
$f(x) = 2x + 2$	
$f(x) = 2x + 5$	

	Steigung
$f(x) = -x - 1$	
$f(x) = x - 1$	
$f(x) = 2x - 1$	
$f(x) = 5x - 1$	

Lineare Funktion	$y = f(x) = mx + t$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Graph	Gerade
Schnittpunkt der Geraden mit y-Achse	$f(0) = t$
Steigung	m



□

Eine Gerade wird durch 2 Punkte festgelegt:
Beispiel: Gerade durch $P_1 = (1,2)$ und $P_2 = (3,3)$
$\Rightarrow$ Zeichnen
$\Rightarrow$ Was ist die Funktionvorschrift $y = f(x) = mx + t$?
$\Rightarrow$ Steigungsdreieck einzeichnen

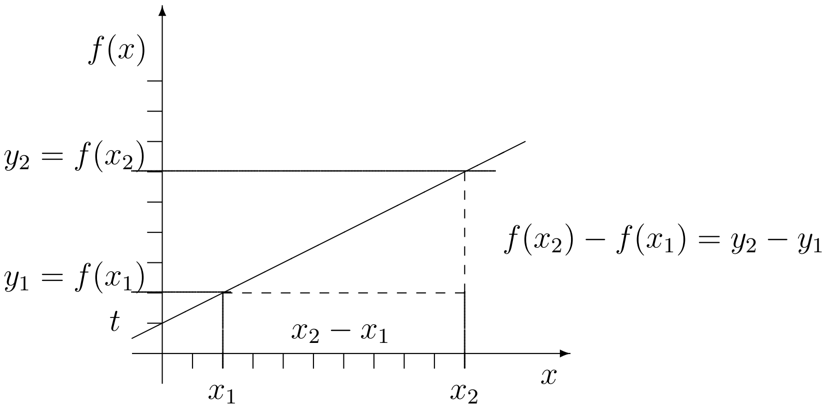
$$m = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ y-Achsenabschnitt t durch einsetzen von P_1 bestimmen:

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + t = 2 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$\Rightarrow$ Lösung $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. □

Allgemein:



Steigung:	$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Durchschnitt mit y-Achse:	$f(0) = t = y_1 - mx_1$
Funktionsgleichung:	$f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,x + t$

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:

a) $x + 47 = 81$

b) $x - 12 = 51$

c) $23 + x = 38$

d) $x - 44 = 44$

e) $y - 12 = 30$

f) $23 + z = -55$

g) $x + 16 = 7$

h) $x - 33 = 0$

Aufgabe 2:

a) $7 + (x - 3) = 14 + 10$

b) $2 - (3 - x) = x - (2 + x)$

c) $29 - 41 = 19 - (-x + 12)$

d) $(9x + 2) - 8x = (9x + 12) - 9x$

Aufgabe 3:

a) $3x - 4 = 8$

b) $15x + 3 = 6x$

c) $5x - 36 = 22 + 4x$

d) $16 + 9x = 8x + 18$

e) $24 - 3x = 26 - 4x$

f) $13y + 5 = 40 + 12y + 25$

g) $6 + 11x + 2 = 6x + (8 + 4x)$

h) $(7 + 3)x = 24 + 9x$

Aufgabe 4:

a) $\frac{x}{c} - b = a$

b) $\frac{x}{p} + 1 = \frac{q}{p}$

c) $cx - d = x$

d) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

e) $(p + x)(q + x) = (p - x)(q - x)$

f) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{b}$

g) $x(a - b) = a(b - x)$

h) $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = m - n$

i) $ax - bx = cx$

Aufgabe 5:

Aus dem Rechenbuch des Abu Zacharjia el Hassar:
Bei einem Fisch nimmt der Kopf ein Drittel und der Schwanz ein Viertel seines Gewichtes ein, das Mittelstück wiegt 10 Pfund. Wieviel wiegt der Fisch?

Aufgabe 6:

Aus dem Rechenbuch des Inders Bhaskara (ca.1150 n.Chr.):
Von einem Schwarm Bienen läßt sich ein Fünftel auf einer Kadamamablüte, ein Drittel auf einer Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja; eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und her schwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandanus. Sage mir nun die Anzahl der Bienen.

Aufgabe 7:

Auf einem Dach sitzen 5 Spatzen. Otto erschießt 2 davon. Wieviele bleiben sitzen?

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1:
Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der linearen Funktionen:

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = 2x + 2$
c) $f(x) = 2x + 3$
d) $f(x) = 2x$
e) $f(x) = 2x - 1$
f) $f(x) = x + 1$
g) $f(x) = 3x + 1$
h) $f(x) = -x + 1$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte P und Q geht.

a) $P(1|4), \quad Q(4|10)$
b) $P(1|3), \quad Q(-1|-5)$
c) $P(0|-2), \quad Q(3|1)$
d) $P(-1|-7), \quad Q(1|7)$
e) $P(2|7), \quad Q(5|25)$
f) $P(1|0), \quad Q(2|30)$

Aufgabe 3:
Zeichnen Sie ein Steudiagramm, und eine möglichst gut angepasste Gerade. Was ist die Funktionsgleichung der Geraden?

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-0,5	0,8	3	5,1	6,9	9,4	10,7	13,01	14,99

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,8	3,2	4,1	5,02	5,98	6,89	8,04	8,97	10,3

c)

x	15	17	22	33	37	40	50
y	14,20	14,34	14,89	15,78	16,23	16,46	17,03

d)

x	1	3	4	6	8	12	15	20
y	14	12.34	12.02	10.56	11	8.41	6.98	4.23

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Regressionsgeraden zu den Steudiagrammen aus Aufgabe 3 nach den Formeln:

$$\text{Regressionsgerade } R: \quad y = f(x) = B \cdot x + A$$

mit

$$B = \frac{\frac{1}{n}\sum_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2}$$

$$A := \frac{\bar{x} \cdot \frac{1}{n}(\sum_i x_i y_i) - \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{1}{n}\sum_i y_i - B \cdot \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

a)

b)

c)

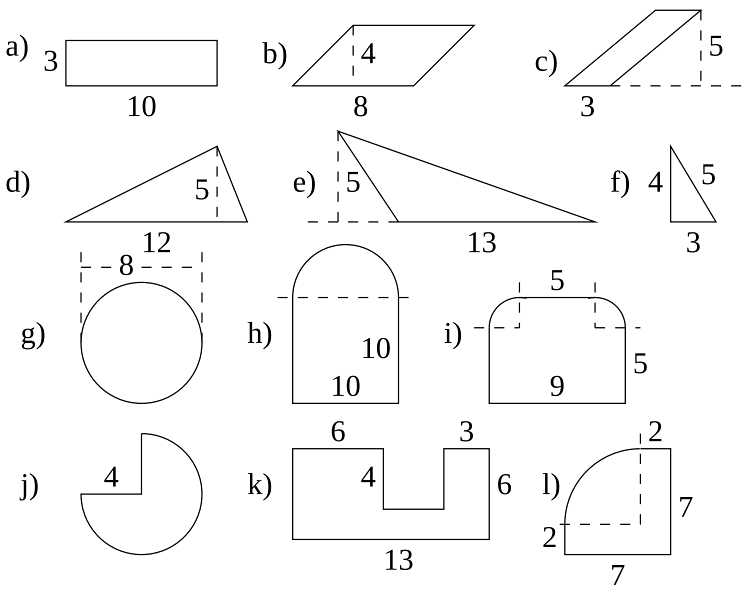
d)

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Von einem $30\,m$ langen Gartenschlauch sollen $1,35\,m$ lange Stücke abgeschnitten werden.

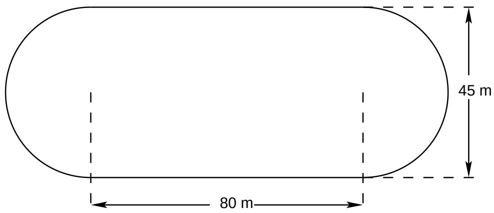
(1) Wieviel Stücke erhält man?
(2) Wie lang ist das Reststück?

Aufgabe 2:
Berechne die Fläche der folgenden Figuren (Längenangaben in cm):



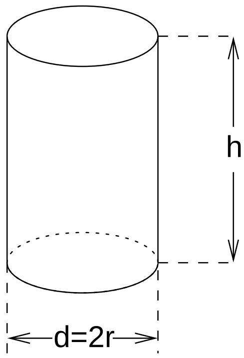
Aufgabe 3:

Berechne die Fläche des Sportplatzes:



Aufgabe 4:

Ein zylindrischer Silo der Ausmaße: Höhe $h = 10\,\mathrm{m}$, Durchmesser $d = 3\,\mathrm{m}$ soll gestrichen werden. Für wieviel Quadratmeter muß Farbe gekauft werden?

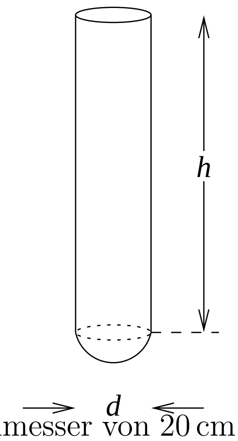


Aufgabe 5:

Ein Reagenzglas hat im Querschnitt die folgenden Abmessungen:

$$h = 25\,\mathrm{cm}, \quad d = 2\,\mathrm{cm}$$

Berechne seine (äußere) Oberfläche.
Berechne sein Fassungsvermögen.

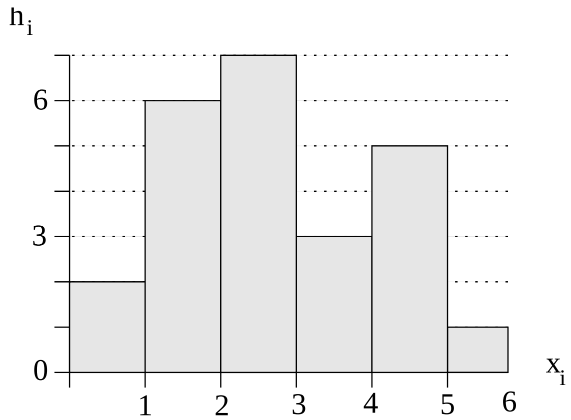


Aufgabe 6:

Wieviel Liter faßt ein Becherglass mit einem Innendurchmesser von $20\,\mathrm{cm}$ und einer Füllhöhe von $32,5\,\mathrm{cm}$?

Aufgabenblatt 7

Eine statistische Erhebung liefert das folgende Histogramm:



a) Vervollständigen Sie die Häufigkeitstabelle:

i	$]x_i^u, x_i^o]$	h_i	H_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	$]0,1]$				
2	$]1,2]$				
3	$]2,3]$				
4	$]3,4]$				
5	$]4,5]$				
6	$]5,6]$				

b) Berechnen Sie n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$ und $\frac{3}{4}n$:

c) Modusklasse: Modus:

d) Medianklasse: Median:

e) Berechnen Sie die Quantile: $x_{25\%}$, $x_{50\%}$ und $x_{75\%}$

f) Das arithmetische Mittel:

g) Spannweite:

h) Varianz:

i) Standardabweichung:

j) Variationskoeffizient:

6. Logarithmen

Beispiele:

$$10^x = 1000 \qquad \Leftrightarrow \quad x = 3$$
$$2^x = \frac{1}{16} \qquad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

Problem: Finde die Lösung der Gleichung:

$$a^x = b, \quad \text{mit } a, b > 0$$

Logarithmus: $\log_a b$ ist die (einzige) Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a, b > 0$. Also

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$\log_a b$ heißt *Logarithmus von b zur Basis a*.

Beispiele: $\log_{10} 10\,000 = 4$ denn $10\,000 = 10^4$

$\log_{10} 0,1 = -1$ denn $10^{-1} = 0,1$

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$ denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Spezielle Logarithmen: $\log = \mathrm{Lg} = \lg = \mathrm{Log} = \log_{10}$ Zehnerlogarithmus

$\ln = \log_e$ natürlicher Logarithmus

Rechenregeln für Logarithmen: $\log_a 1 = 0$

$$\log_a a = 1$$
$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a \tfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\log_a \left(b^c\right) = c \cdot \log_a b$$
$$\log_a b = \tfrac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a a^x = x$$
$$a^{\log_a b} = b$$

Rechnen mit Logarithmen:

$$\log_7 3 = \tfrac{\log 3}{\log 7} = \tfrac{\ln 3}{\ln 7} \simeq 0,5646$$
$$\log_5(4 \cdot 7 \cdot 3^9) = \log_5 4 + \log_5 7 + 9 \cdot \log_5 3 = \tfrac{\log 4 + \log 7 + 9 \log 3}{\log 5} \simeq 8,2139$$
$$\log_7(3 \cdot 5^{-3}) = \log_7 3 - 3 \log_7 5 = \tfrac{\ln 3 - 3 \ln 5}{\ln 7} \simeq -1,92$$

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:
Formen Sie mit Hilfe der Logarithmusgesetze um

a) $\lg \frac{ax}{b}$

b) $\log_a \frac{1}{x^2 a^3}$

c) $\log \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$

d) $\log_3(7u^2x^3)$

e) $\lg abc$

f) $\log_3 \frac{4}{9x^5}$

g) $\lg(3a^7 \cdot 6b^3 \cdot 2c)$

h) $\lg[(ab)^3 \cdot c^{\frac{1}{2}}]$

Aufgabe 2:
Drücken Sie durch einen Logarithmusterm aus:

a) $2\lg x + 3\lg y - \lg z$

b) $-\ln u - 2\ln v - \frac{1}{3}\ln w$

c) $2(\log x - \log y)$

d) $\frac{1}{2}(\lg u - 3\lg v)$

e) $\log x - \frac{1}{2}(\log y + 2\log x)$

f) $\frac{1}{4}\log_a(b+c) - \frac{1}{3}\log_a(b-c)$

g) $\log_a p - \frac{1}{2}\log_a q + \frac{1}{4}\log_a r$

h) $3\log_a b + \frac{1}{2}\log_a(b+x)$

6.1. **Radioaktiver Zerfall.**

Radioaktiver Zerfall:

Anzahl der Teilchen bei $t = 0$:	N_0
Halbwertszeit:	$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
Zerfallskonstante:	$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$
Einheit von λ:	$s^{-1} = Bq$ Becquerel
Zerfallsgesetz:	$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
Aktivität:	Zerfälle pro Zeiteinheit
Aktivität bei $t = 0$:	$A_0 = \lambda N_0$,
Aktivität zum Zeitpkt. t:	$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$

Zeiteinheiten:

Jahr $= a$, Tag $= d$, Stunde $= h$, Minute $= min$, Sekunde $= s$

$$1\,a = 365,25\,d \quad 1\,d = 24\,h \quad 1\,h = 60\,min \quad 1\,min = 60\,s$$

Beispiel 14. (Blatt 10, Aufgabe 1) Das Radium-Isotop $^{224}_{88}Ra$ hat eine Halbwertzeit von $T_{1/2} = 3,64\,d$ (Tagen/Days). Das heißt, nach dem Zeitraum $T_{1/2}$ hat sich eine gegebene Menge Radium halbiert.
Wann sind nur noch 1% der Ausgangsmenge vorhanden?

$$\begin{aligned}
N(t_{1\%}) &= N_0 \cdot 1\% = N_0 \cdot \frac{1}{100} = N_0 \cdot 0,01 \\
N(t_{1\%}) &= N_0 e^{-\lambda t_{1\%}} \\
\Rightarrow \quad 0,01 &= e^{-\lambda t_{1\%}} \\
\ln 0,01 &= -\lambda t_{1\%} \\
t_{1\%} &= -\frac{\ln 0,01}{\lambda} = -\frac{\ln 0,01 \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \\
&= -\frac{\ln 0,01 \cdot 3,64\,d}{\ln 2} = 24,18\,d
\end{aligned}$$

□

Allgemein: Nach

$$t_{x\%} = -\frac{\ln \frac{x}{100}}{\lambda} = -\frac{\ln \frac{x}{100} \cdot T_{1/2}}{\ln 2}$$

Sekunden sind noch $x\%$ des Radioaktiven Stoffes vorhanden.

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:
Das natürlich vorkommende Radium-Isotop ${}^{224}_{88}Ra$ hat eine Halbwertzeit von $T_{1/2} = 3,64\,d$. Wann sind 30% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 2:
Berechne die Zerfallskonstante λ in $Bq = s^{-1}$.

Isotop	Name	Halbwertszeit $T_{1/2}$	λ
${}^{235}_{92}U$	Uran	$7,04 \cdot 10^8\,a$	
${}^{231}_{90}Th$	Thorium	$25,6\,h$	
${}^{231}_{91}Pa$	Protaktinium	$3,25 \cdot 10^4\,a$	
${}^{219}_{86}Rn$	Radon	$3,96\,s$	
${}^{224}_{88}Ra$	Radium	$3,64\,d$	
${}^{228}_{90}Th$		$1,913\,a$	

Für die folgenden 4 Aufgaben benutze die Werte aus der Tabelle aus Aufgabe 2.

Aufgabe 3:

(1) Wieviele Atome ${}^{235}_{92}U$ sind in einer Probe der Aktivität $A_0 = 312 \cdot 10^5\, Bq$ enthalten?
(2) Berechne die Stoffmenge $n({}^{235}_{92}U)$
(3) Berechne die Masse $m({}^{235}_{92}U)$
(4) Nach welcher Zeitspanne sind 20% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 4:

(1) Wieviele Atome ${}^{231}_{90}Th$ sind in einer Probe der Aktivität $A_0 = 135,4 \cdot 10^{17}\, Bq$ enthalten?
(2) Berechne die Stoffmenge $n({}^{231}_{90}Th)$
(3) Berechne die Masse $m({}^{231}_{90}Th)$
(4) Nach welcher Zeitspanne sind noch 80% der Ausgangsmenge vorhanden?

Aufgabe 5:

(1) Wieviele Atome ${}^{231}_{91}Pa$ sind in einer Probe der Aktivität $A_0 = 4,05\, Bq$ enthalten?
(2) Berechne die Stoffmenge $n({}^{231}_{91}Pa)$
(3) Berechne die Masse $m({}^{231}_{91}Pa)$
(4) Nach welcher Zeitspanne t_0 sind 10% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 6:

(1) Wieviele Atome ${}^{219}_{86}Rn$ sind in einer Probe der Aktivität $A_0 = 87,5 \cdot 10^{22}\, Bq$ enthalten?
(2) Berechne die Stoffmenge $n({}^{219}_{86}Rn)$
(3) Berechne die Masse $m({}^{219}_{86}Rn)$
(4) Nach welcher Zeitspanne sind 20% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 7:

Berechne die Halbwertszeit $T_{1/2}$.

Isotop	Name	λ	Halbwertszeit $T_{1/2}$
$^{232}_{90}Th$	Thorium	$1,56 \cdot 10^{-18}\, s^{-1}$	
$^{234}_{90}Th$		$3,33 \cdot 10^{-7}\, s^{-1}$	
$^{234}_{91}Pa$	Protaktinium	$2,85 \cdot 10^{-5}\, s^{-1}$	
$^{226}_{88}Ra$	Radium	$1,37 \cdot 10^{-11}\, s^{-1}$	
$^{223}_{88}Ra$		$7,02 \cdot 10^{-7}\, s^{-1}$	
$^{212}_{82}Pb$	Blei	$1,81 \cdot 10^{-5}\, s^{-1}$	

Aufgabe 8:

Ein Mol eines radioaktiven Stoffes der Halbwertszeit $5,27\,a$ ist gegeben.

(1) Berechne die Zerfallskonstante.
(2) Bestimme N_0
(3) Stelle die Zerfallsgleichung auf.
(4) Wieviel Atome sind nach einem Jahr noch vorhanden?
(5) Wieviel Prozent der Teilchen sind nach 2 Jahren noch vorhanden?