MATHEMATIK MTA 11
SCHULJAHR 06/07

PROF. DR. CHRISTINA BIRKENHAKE

Inhaltsverzeichnis

christina@birkenhake.net, http://christina.birkenhake.net .

1. Grundbegriffe

Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

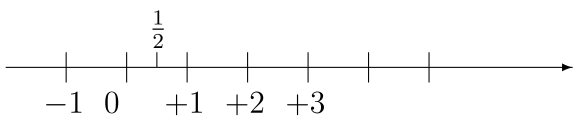
Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
Beispiele rationaler Zahlen: $\frac{1}{2} = 0,5$ (z.B. ein halbes Jahr),
$\frac{1}{12}$ (z.B. Tortenstück),
$\frac{3}{4} = 0,75$ (z.B. dreiviertel 12 = 11.45 h),
$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 0,6666\ldots$ periodische Zahl.

Irrationale Zahlen: Zahlen wie die Kreiszahl $\pi = 3,14\ldots$, die Eulersche Zahl $e = 2,71\ldots$, und Wurzeln wie z.B. $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ haben in ihrer Dezimalentwicklung unendlichviele (nichtperiodische) Stellen, Solche Zahlen heißen *irrational.*

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$

Die reellen Zahlen werden auf dem *Zahlenstrahl* veranschaulicht:



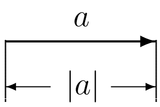
Anordnung von Zahlen:

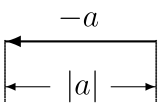
$x < y$	x ist kleiner y
$x \leq y$	x ist kleiner gleich y
$x = y$	x ist gleich y
$x > y$	x ist größer y
$x \geq y$	x ist größer gleich y

2. Addition, Multiplikation und das Distributivgesetz

Addition:

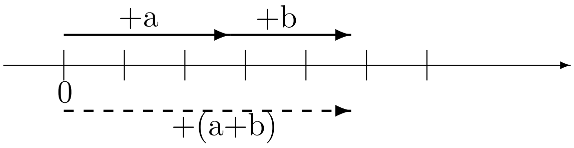
Die Addition von reellen Zahlen kann man sich durch das Aneinanderlegen von **Vektoren** (Pfeilen) auf dem Zahlenstrahl vorstellen. Dabei entspricht einer reellen Zahl a ein Pfeil der Länge $|a|$ mit Pfeilrichtung rechts, wenn $a > 0$ und Pfeilrichtung links, wenn $a < 0$:

$a > 0$: 

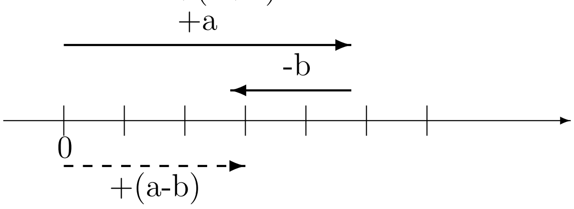
und 

Die folgenden Skizzen am Zahlenstrahl gelten für den Fall $0 < b < a$, die linksseitigen Rechnungen gelten für alle reellen Zahlen a und b:

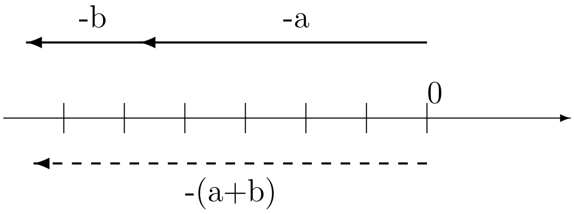
$(+a) + (+b) = +(a + b)$



$(+a) + (-b) = +(a - b)$



$(-a) + (-b) = -(a + b)$



Ähnlich:

$$
\begin{aligned}
a < b: &\qquad (+a) + (-b) = -(b - a) \\
a > b: &\qquad (-a) + (+b) = -(a - b) \\
a < b: &\qquad (-a) + (+b) = +(b - a)
\end{aligned}
$$

⇒ *Blatt 1, Aufgabe 3*

Multiplikation:

Regel 2.1. *Minus mal Minus ist Plus:* *Blatt 1, Aufgaben 4,5*

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Distributivgesetz: *Blatt 1, Aufgabe 7*

Regel 2.2.

$$a \cdot b + a \cdot c \quad \underset{\xleftarrow[\text{Ausmultiplizieren}]{}}{\overset{\xrightarrow{\text{Ausklammern}}}{=}} \quad a \cdot (b + c)$$

-1 ausklammern: *Blatt 1, Aufgabe 10*

$$\begin{aligned} -a - b &= -(a + b) \\ -a + b &= -(a - b) \\ a - b &= -(-a + b) = -(b - a) \\ a + b &= -(-a - b) \end{aligned}$$

Regel 2.3.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Klammerregeln: $\Rightarrow$ *Blatt1, Aufgabe 8,9*

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + b + c \\ a + (b - c) &= a + b - c \\ a - (b + c) &= a - b - c \\ a - (b - c) &= a - b + c \end{aligned}$$

Regel 2.4. *Punkt vor Strichrechnung!*

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) $4 \leq 4$
b) $6 > 7$
c) $6 < 7$
d) $1000 \geq 0$
e) $5 = 8$

Aufgabe 2:

a) $(+7) - (+5) =$
b) $(+5) - (+7) =$
c) $(-5) - (+7) =$
d) $(-7) - (-5) =$
e) $(-18) - (+39) =$
f) $(-46) - (-14) =$
g) $(-x) - (+11x) =$
h) $-35 - 78 =$

Aufgabe 3:
Lösen Sie die Klammer auf, ohne zu addieren oder zu subtrahieren.

a) $12 + (7 + 2)$
b) $12 + (7 - 2)$
c) $12 - (7 + 2)$
d) $12 - (7 - 2)$

Aufgabe 4:

a) $19 - (+23) + (+11) + (-37) - (-16) =$
b) $7 - [-5 - (-3)] - 4 + [3 - (-4) - 6] =$

Aufgabe 5:

a) $3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-6) =$
b) $(-5) \cdot 6 \cdot (-2) \cdot (-3) =$

Aufgabe 6:
Klammern Sie aus bzw ein

a) $3a + 3b$
b) $5x - 5y$
c) $(e-1)e$
d) $6(3x-4y) + 5(2x-3y)$

Aufgabe 7:

a) $6x - 8y - (4x + 3y - 5z)$
b) $27p - (27p - 15q) + 28q$
c) $19w - (24x - 19w)$
d) $22x - (16x + 9y)$
e) $(2x - y - 3z) + (x + y - z)$

Aufgabe 8:

a) $x + [y + (u - v)]$
b) $x + [(u - v) - y]$
c) $x + [y - (u + v)]$
d) $x - [y + (u - v)]$
e) $x - [y - (u - v)]$
f) $x - [y - (u + v - w)]$
g) $[a + (b - c)] - x$
h) $a - [(u - v) - (x - y)]$

Aufgabe 9:

a) $a - \{b + [c - (d + e)]\}$
b) $a - \{[b - (c - d) - e] + f\}$

Aufgabe 10:
Klammern Sie -1 aus

a) $-a - b - c$
b) $-a^2 - 1$
c) $x - y$

Für einen Bruch
$$\frac{a}{b}$$
heißt a der **Zähler** und b der **Nenner**.

Regel 3.1.
Erweitern und Kürzen von Brüchen: $\Rightarrow$ *Blatt 2, Aufgabe 1*
$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} = \frac{ac}{bc}$$
Multiplikation : $\Rightarrow$ *Blatt 2, Aufgabe 2,3,4*
$$\begin{aligned}
&x \cdot \frac{a}{b} = x\frac{a}{b} = \frac{xa}{b} = \frac{a}{b}x\\
&\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx}\\
&\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}\\
&\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(mit Kehrbruch multiplizieren)}
\end{aligned}$$
Addition: $\Rightarrow$ *Blatt 2, Aufgabe 5*
$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(Hauptnenner ist } b\text{)}\\
&\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{(Hauptnenner ist } bd\text{)}\\
&\frac{a}{b} \pm x = \frac{a \pm xb}{b}
\end{aligned}$$

Beispiel:
$$3\left(\frac{2}{3}+1\right) = 3\left(\frac{2+3}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right) = 3\frac{5}{6} \stackrel{?}{=} \begin{cases} 3+\frac{5}{6}=\frac{23}{6}\,? \\ 3\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{2}\,? \end{cases}$$
Die Lösung $\frac{5}{2}$ ist die richtige! □

Regel 3.2.
$$a\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

Achtung:
$$3\frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$
alles andere ist **falsch!**

Brüche und -1:

$$\boxed{-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{-a\cdot(-1)}{b\cdot(-1)} = \frac{a}{-b}}$$

Dezimalentwicklung eines Bruches: *⇒ Blatt 2, Aufgabe 7,8*

$$\frac{1}{2} = 0,5$$
$$\frac{3}{4} = 0,75$$
$$\frac{1}{3} = 0,\bar{6} = 0,666\ldots$$
$$\frac{99}{101} = \begin{cases} 0{,}980198020\ldots \\ 0{,}9801980 \\ 0{,}98020 \\ 0{,}98 \\ 1{,}0 \end{cases}$$

Beispiel:
Runde auf 2 Stellen: *⇒ Blatt 2, Aufgabe 9*

$$\left(\frac{70}{9} + \frac{50}{8}\right)^2 = 196,78$$
$$\big(7,78 + 6,25\big)^2 = 14,03^2 = 196,84$$

□

Regel 3.3. *Zwischenergebnisse dürfen nicht gerundet werden, nur das Endergebnis.*

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Kürze soweit wie möglich

a) $\frac{3}{6}$

b) $\frac{3x}{x}$

c) $\frac{18}{3d}$

Aufgabe 2:

a) $3\frac{8}{6}$

b) $5a\frac{7b}{30a}$

c) $\frac{12d}{144c}6bc$

d) $\frac{55}{7} : 5$

e) $\frac{3ab}{9b} : 15a$

Aufgabe 3:

a) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4}$

b) $3 \cdot \frac{5}{2}$

c) $\frac{9}{11} \cdot \frac{33}{12}$

d) $\frac{35}{48} \cdot \frac{36}{25}$

e) $\frac{9}{4} \cdot \frac{11}{7}$

f) $7 \cdot \frac{3}{2}$

g) $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4}$

h) $\frac{9}{12} \cdot \frac{96}{81}$

Aufgabe 4:

a) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{0}{56} : \frac{18}{31}$

c) $\frac{3}{5} : \frac{9}{12}$

d) $\frac{63}{54} : \frac{18}{21}$

e) $\frac{12}{5} : \frac{46}{15}$

f) $\frac{1}{6} : \frac{11}{12}$

g) $\frac{1}{8} : \frac{9}{12}$

h) $\frac{25}{55} : \frac{65}{77}$

i) $\frac{112}{77} : \frac{28}{33}$

j) $\frac{27}{99} : \frac{3}{11}$

Aufgabe 5:

a) $\frac{7}{9} + \frac{5}{8}$

b) $\frac{5}{12} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{8}{24} - \frac{9}{45}$

d) $\frac{1}{4} + \frac{11}{20}$

Aufgabe 6:

a) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{11}{13} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6}$

e) $\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}}$

Aufgabe 7:

Wandeln Sie Brüche in Dezimalzahlen um und runden Sie auf vier Stellen

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{8}{7}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{1}{6}$

f) $\frac{12}{96}$

Aufgabe 8:

Wandeln Sie Dezimalzahlen in vollständig gekürzte Brüche um

a) $0,04$

b) $0,00002$

c) $0,698$

d) $0,75$

e) $2,125$

4. Potenzen und Wurzeln

4.1. **Potenzen mit ganzen Exponenten.**

Potenzen einer Zahl:

$$a^2 = a \cdot a$$
$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Für den Term a^n heißt a die *Basis* und n der *Exponent* oder *Hochzahl.*

Spezielle Potenzen: $a^1 = a$

$a^0 = 1$

Potenzen mit negativem Exponenten:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{-1} = \frac{1}{a} \\ \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{array}}$$

Beispiele: $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$

$10^3 = 1000$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

$\Rightarrow$ *Blatt 3, Aufgabe 1*

4.2. **Erstes Potenzgesetz.**

Welche Zahl ist größer: $2^{1900} \cdot 2^{89}$ oder $2 \cdot 2^{1989}$?

$2^{1900} \cdot 2^{89} = 2^{1989} < 2 \cdot 2^{1989} = 2^{1990}$

Für $p, q \in \mathbb{N}$ gilt: $a^p \cdot a^q = \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{q \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{p+q \text{ Faktoren}} = a^{p+q}$

1. Potenzgesetz:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für } x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } a \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ gilt:} \\ \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \end{array}}$$

$\Rightarrow$ *Blatt 3, Aufgaben 2 und 3*

4.3. **Zweites Potenzgesetz.**

Welche Zahl ist größer: $2^{1989} \cdot 3^{1989}$ oder 5^{1989}?

$2^{1989} \cdot 3^{1989} = (2 \cdot 3)^{1989} = 6^{1989} > 5^{1989}$

Für $p \in \mathbb{N}$ gilt: $a^p \cdot b^p = \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot \ldots \cdot b)}_{p \text{ Faktoren}} = \underbrace{(ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{p \text{ Faktoren}} = (ab)a^p$

2. Potenzgesetz:

> Für $x \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ gilt:
>
> $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad a^x : b^x = \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\Rightarrow$ *Blatt 3, Aufgabe 4*

4.4. **Drittes Potenzgesetz.**

Ordne der Größe nach: $4^{(3^2)}$, $\left(4^2\right)^3$, $4^{(2^3)}$, $\left(4^3\right)^2$?

$\left(4^2\right)^3 = 4^6 = \left(4^3\right)^2 = 4^6 < 4^{(2^3)} = 4^8 < 4^{(3^2)} = 4^9$

Für $p, q \in \mathbb{N}$ gilt: $(a^p)^q = \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{p \text{ Faktoren}}}_{q \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{p \cdot q \text{ Faktoren}} = a^{pq}$

3. Potenzgesetz:

> Für $x, y \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ gilt:
>
> $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

$\Rightarrow$ *Blatt 3, Aufgabe 4*

Zehnerpotenzen:

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
&10^{-2} = 0,01\\
&10^{-1} = 0,1\\
&10^{0} = 1\\
&10^{1} = 10\\
&10^{2} = 100\\
&10^{3} = 1000\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Beispiele: $342,1 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1}$

$5\,000\,000 = 5 \cdot 10^6$

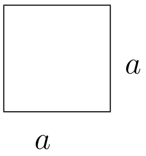
$6,0221367 \cdot 10^{23} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ Avogadrosche Konstante

Beispiele: (Einheiten umrechnen)

$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m} &\Rightarrow 1\,\mathrm{km}^2 = (1000\,\mathrm{m})^2 = 1000^2\,\mathrm{m}^2 = 10^6\,\mathrm{m}^2\\
1\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{mm} &\Rightarrow 1\,\mathrm{cm}^2 = (10\,\mathrm{mm})^2 = 100\,\mathrm{mm}^2 = 10^2\,\mathrm{mm}^2\\
1\,\mathrm{dm} = 100\,\mathrm{mm} &\Rightarrow 1\,\mathrm{dm}^2 = (100\,\mathrm{mm})^2 = 10\,000\,\mathrm{mm}^2 = 10^4\,\mathrm{cm}^2\\
1\,\mathrm{mm} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{m} &\Rightarrow 1\,\mathrm{mm}^3 = \left(\frac{1}{1000}\,\mathrm{m}\right)^3 = \left(10^{-3}\right)^3\,\mathrm{m}^3 = 10^{-9}\,\mathrm{m}^3
\end{aligned}$$

Ähnliches in Aufgabenblatt 5 Aufgabe 1

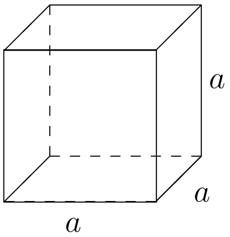
4.5. **Potenzen mit rationalen Exponenten.**



Quadrat mit Seitenlänge a
Fläche: $A = a \cdot a = a^2$

Sei $A = 9\,\text{cm}^2$ $\quad\Rightarrow\ a = ? = \sqrt{9\,\text{cm}^2} = 3\,\text{cm}$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{A} = \sqrt[2]{A}$$



Würfel mit Seitenlänge a
Volumen: $V = a^3$

Sei $V = 125\,\text{cm}^3$ $\quad\Rightarrow\ a = ? = \sqrt[3]{125\,\text{cm}^3} = 5\,\text{cm}$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{V}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \text{ ist die positive Lösung von } x^n = a}$$

Der Term $\sqrt[n]{a}$ heißt *n-te Wurzel aus a*. Im Fall $n = 2$, also $\sqrt{a}$, spricht man auch von der *Quadratwurzel*. Für den Term $\sqrt[n]{a}$ heißt a der *Radikant*. Der Radikant darf nicht negativ sein, also $a \geq 0$.

Potenzen mit rationalen Exponenten:

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, \quad \ldots \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Rechenregeln für Wurzeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \end{array}}$$

⇒ *Aufgabenblatt 4*

4.6. **Anwendung: Du-Bois-Formel:** *Aufgabenblatt 5, Aufgabe 2*

Die Du-Bois-Formel schätzt die Körperoberfläche A eines Menschen mittels des Gewichtes m und und der Körpergröße l ab:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{m}{\mathrm{kg}}\right)^{0{,}425}\left(\frac{l}{\mathrm{cm}}\right)^{0{,}725} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2\\
&= \left(\frac{m}{\mathrm{kg}}\right)^{\frac{17}{40}}\left(\frac{l}{\mathrm{cm}}\right)^{\frac{29}{40}} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2\\
&= \sqrt[40]{\left(\frac{m}{\mathrm{kg}}\right)^{17}}\sqrt[40]{\left(\frac{l}{\mathrm{cm}}\right)^{29}} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

Also

$$\boxed{A = \sqrt[40]{\left(\tfrac{m}{\mathrm{kg}}\right)^{17}}\sqrt[40]{\left(\tfrac{l}{\mathrm{cm}}\right)^{29}} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2}$$

Beispiel: Körpergewicht $m = 60\,\mathrm{kg}$ und Größe $l = 170\,\mathrm{cm}$

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{60\,\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}\right)^{0{,}425}\left(\frac{170\,\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}}\right)^{0{,}725} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2\\
&= 60^{0{,}425}170^{0{,}725}71,84\,\mathrm{cm}^2 = 16949,47\,\mathrm{cm}^2 = 1,69\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Im Pschyrembel von 2002 steht eine *vereinfachte Du-Bois-Formel:*

$$\boxed{A' = \sqrt{\tfrac{m}{\mathrm{kg}}}\sqrt{\tfrac{l}{\mathrm{cm}}} \cdot 167,2\,\mathrm{cm}^2}$$

Im obigen Beispiel ergibt sich die Körperoberfläche:

$$
\begin{aligned}
A' &= \sqrt{\frac{60\,\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}}\sqrt{\frac{170\,\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}}} \cdot 167,2\,\mathrm{cm}^2\\
&= \sqrt{60}\sqrt{170} \cdot 167,2\,\mathrm{cm}^2 = 16\,886,37\,\mathrm{cm}^2 = 1,69\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Wenn wir Prozentrechnung machen: Um wieviel Prozent $p\%$ weicht das neue Ergebnis von dem alten ab?

Zielgleichung: $A' = A - p\%A$ da $A' < A$

$$
\begin{aligned}
p\% &= \frac{A - A'}{A}100\%\\
&= \frac{16949,47 - 16886,37}{16949,47} \cdot 100\% = 0,37\%
\end{aligned}
$$

Merkblatt zur Bruch- und Potenzrechnung

Beispiel	Regel
Brüche müssen vollständig gekürzt werden	$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$
$3\frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$	Zähler darf größer als Nenner sein *Kein Zeichen* = Multiplikation

Multiplikation und Division von Brüchen

$3\frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{6} = \frac{7}{2}$	$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$
$\frac{3a}{2b} \cdot \frac{4b}{5} = \frac{12ab}{2 \cdot 5b} = \frac{6a}{5}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
$5 : \frac{10}{3} = \frac{5 \cdot 3}{10} = \frac{3}{2}$	$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ Multiplikation mit Kehrbruch
$\frac{3a}{2b} : \frac{4b}{5} = \frac{3a}{2b} \cdot \frac{5}{4b} = \frac{15a}{8b^2}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Multiplikation mit Kehrbruch
$\frac{3b}{5c} : 7b = \frac{3b}{5c \cdot 7b} = \frac{3}{35c}$	$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$
$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$	$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Addition von Brüchen

$\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{ad}$ Hauptnenner suchen!

Potenzen

$345^0 = 1$	$a^0 = 1$
$234^1 = 234$	$a^1 = a$

Beispiel	Regel
$5^{-1} = \frac{1}{5}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$	
$\frac{1}{5^{-3}} = 5^3$	
$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$5^2 \cdot 5^{-3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$4^5 \cdot a^5 = (4a)^5$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(3^2\right)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$
$(-3)^5 = (-1)^5 \cdot 3^5 = -3^5$	$(-1)^{\text{ungerade Zahl}} = -1$
$(-3)^4 = (-1)^4 \cdot 3^4 = 3^4$	$(-1)^{\text{gerade Zahl}} = 1$
	Zehnerpotenzen
$1000 = 10^3$	$1\underbrace{0 \cdots 0}_{n\text{-mal } 0} = 10^n$
$0,0001 = 10^{-4}$	$0,\underbrace{0 \cdots 01}_{n\text{-Stellen}} = 10^{-n}$
$\sqrt{1000\,000} = \sqrt{10^6} = 10^3 = 1000$	$\sqrt{10^{2n}} = 10^n$
$\sqrt{0,0001} = \sqrt{10^{-4}} = 10^{-2} = 0,01$	$\sqrt{10^{-2n}} = 10^{-n}$

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
Vereinfachen Sie

a) $x \cdot x \cdot x \cdot x =$

b) $x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} =$

c) $x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot y^{-1} =$

d) $(x \cdot y)^2 =$

e) $(x^{-2}y^2)^{-2} =$

f) $-(x^0y) \cdot (x^0y) \cdot (x^0y) =$

Aufgaben zum 1. Potenzgesetz:

Aufgabe 2:
Vereinfache (keine Dezimalzahl!)

a) $3^5 \cdot 3^2 =$

b) $2^8 \cdot 2^{-5} =$

c) $4^{-2} \cdot 4^{-3} =$

d) $4^{-2} : 4^{-3}$

e) $2^8 : 2^3 =$

f) $7^{-3} : 7^2 =$

Aufgabe 3:

a) $\dfrac{x^4}{x^3} =$

b) $\dfrac{y^{4n}}{y^{2n}} =$

c) $\dfrac{a^x \cdot b^{x+y}}{a^{2x-y} \cdot b^{x-y}} =$

d) $\dfrac{x^{k-1} \cdot y^{2k+1}}{x^{-k} \cdot y^{2k-2}} =$

Aufgaben zum 2. Potenzgesetz:

Aufgabe 4:

a) $2^4 \cdot 3^4$

b) $2^4 + 3^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4^3$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 4^{-2}$

e) $10^{-4} : 2^{-4}$

f) $0,6^{-3} : 2^{-3}$

Aufgaben zum 3. Potenzgesetz:

Aufgabe 5:

Vereinfache (keine Dezimalzahl!)

a) $(2^3)^4 =$

b) $(4^2)^{-1} =$

c) $(3^{-2})^4 =$

d) $(z^{-2})^0 =$

e) $(-b^{-4})^3 =$

f) $(-c^5)^{-4} =$

g) $(a^{-1}b^{-5})^{-2} =$

Gemischte Aufgaben:

Aufgabe 6:

Vereinfache (keine Dezimalzahl!)

a) $0,8^3 \cdot 5^3 =$

b) $7^{-2} \cdot 2^{-2} =$

c) $66^{-3} : 3^{-3} =$

d) $4,5^k : 3^k =$

e) $2^n \cdot 5^n =$

f) $5^n \cdot 2^{n+1} =$

g) $\frac{(2a)^3}{a^3} =$

h) $\frac{x^{-4}}{(2x)^{-4}} =$

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:
Begründe wie folgt: $\sqrt[3]{1000} = 10$ denn $10^3 = 1000$

a) $\sqrt[3]{1\,000\,000}$

b) $\sqrt[4]{16}$

c) $\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[3]{125}$

e) $\sqrt[3]{8}$

Aufgabe 2:
Schreibe mit Wurzelzeichen wie folgt: $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

a) $2^6 = 64$

b) $625 = 5^4$

c) $4,41 = 2,1^2$

d) $3^8 = 6\,561$

Aufgabe 3:
Schreibe als Potenz

a) $\sqrt{3} =$

b) $\sqrt[3]{4} =$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}} =$

d) $\sqrt[4]{5^3} =$

e) $\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}} =$

f) $\frac{1}{\sqrt[3]{10}} =$

Aufgabe 4:

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt[4]{32}$

c) $8^{\frac{2}{3}}$

d) $2^{-\frac{4}{3}}$

AUFGABENBLATT 5

Aufgabe 1:
Rechnen Sie in Quadratmeter m^2 bzw Kubikmeter m^3 um:

a) $1\,\mathrm{km}^2 =$

b) $1\,\mathrm{km}^3 =$

c) $10\,\mathrm{km}^2 =$

d) $1\,\mathrm{dm}^2 =$

e) $1\,\mathrm{cm}^2 =$

f) $10\,\mathrm{dm}^2 =$

g) $1\,\mathrm{dm}^3 =$

h) $1\,\mathrm{mm}^2 =$

i) Liter: $10\ \mathrm{l} =$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Körperoberfläche nach beiden Du-Bois-Formeln:

$$A = \sqrt[40]{\left(\frac{m}{\mathrm{kg}}\right)^{17}} \sqrt[40]{\left(\frac{l}{\mathrm{cm}}\right)^{29}} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2 \qquad A' = \sqrt{\frac{m}{\mathrm{kg}}}\sqrt{\frac{l}{\mathrm{cm}}} \cdot 167,2\,\mathrm{cm}^2$$

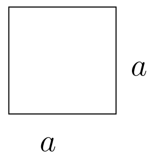
in cm^2 und m^2 auf 2 Dezimalstellen gerundet.

a) $m = 50\,\mathrm{kg}$, $l = 1,60\,\mathrm{m}$

b) $m = 90\,\mathrm{kg}$, $l = 1,85\,\mathrm{m}$

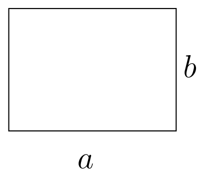
c) $m = 3300\,\mathrm{g}$, $l = 52\,\mathrm{cm}$

Arbeitsblatt: Flächeninhalte



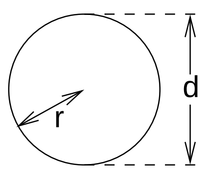
Fläche: $A =$

Umfang: $U =$



Fläche: $A =$

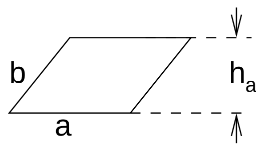
Umfang: $U =$



Durchmesser: d, Radius: $r = \frac{d}{2}$,

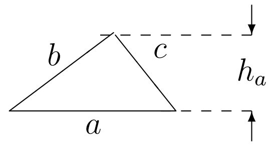
Flächen: $A_K =$

Umfang: $U_K =$



Fläche: $A =$

Umfang: $U =$



Fläche: $A =$

Umfang: $U =$

5.2. **Winkel.**

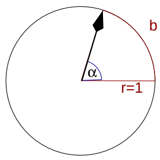
Winkel können in Grad gemessen werden:

$$\begin{aligned} \text{volle Drehung} &\;\hat{=}\; 360^\circ \\ 1/2 \text{ Drehung} &\;\hat{=}\; 180^\circ \\ \text{rechter Winkel} &\;\hat{=}\; 90^\circ \end{aligned}$$

$$1^\circ \text{ (Grad) } = 60'(\text{Minuten}) \;, \quad 1' = 60'' \text{ (Sekunden)}$$

Kreisbogen:

Welchen Winkel bzw Weg legt die Uhrzeigerspitze zu gegebener Zeit zurück?



Zeit	Winkel α	Bogen b
1 h		
1 min		

Der Kreisbogen b wird durch Mittelpunktswinkel α bestimmt und umgekehrt.
1 Umlauf $\hat{=}$ Richtungsänderung um $\alpha = 360^\circ$ Grad $\quad\hat{=}\quad b = 2\pi$

Umrechnung: Gradmaß $\Leftrightarrow$ Bogenmaß

$$\boxed{\alpha \longmapsto b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi, \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b}{2\pi} \cdot 360^\circ \longleftarrow b}$$

	Gradmaß		Bogenmaß
volle Drehung	360°	$\simeq$	2π
$\frac{1}{2}$ Drehung	180°	$\simeq$	π
$\frac{1}{4}$ Drehung	90°	$\simeq$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{6}$ Drehung	60°	$\simeq$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{8}$ Drehung	45°	$\simeq$	$\frac{\pi}{4}$

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Gebe $\frac{1}{7}360°$ in Grad, Minuten und Sekunden an.

Aufgabe 2:
Gebe den Winkel $\frac{\pi}{7}$ in Grad, Gradminuten, und Gradsekunden an.

Aufgabe 3:
Rechne in Bogenmaß um (Ergebnis als Vielfaches von π)

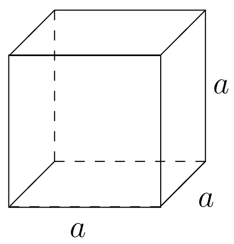
a) $360°$
b) $225°$
c) $105°$
d) $1' =$
e) $31° \, 17' \, 29'' =$

Aufgabe 4:
Wandle folgende Längenmeßwerte in die Einheit Meter um und addiere:
$8,5 \, dm, \quad 125 \, cm, \quad 7050 \, dm, \quad 3,75 \, dm, \quad 95 \, mm, \quad 0,051 \, km$

Aufgabe 5:
Von einem $25 \, m$ langen Gartenschlauch sollen $1,45 \, m$ lange Stücke abgeschnitten werden.

a) Wieviel Stücke erhält man?
b) Wie lang ist das Reststück?

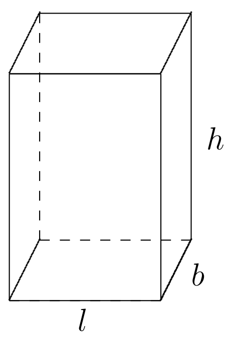
Arbeitsblatt: Körper und Volumina



Oberfläche besteht aus

Oberfläche: $A =$

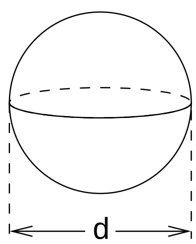
Volumen: $V =$



Oberfläche besteht aus

Oberfläche: $A =$

Volumen: $V =$

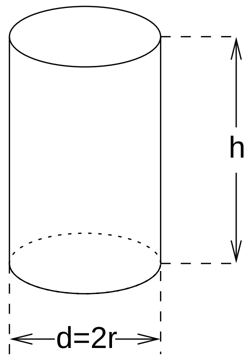


Durchmesser: d

Radius: $r = \frac{d}{2}$

Oberfläche: $A =$

Volumen: $V =$

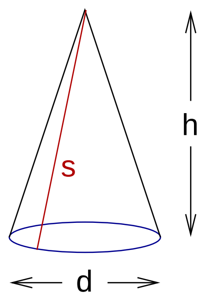


Boden und Deckel:

Mantelfläche:

Oberfläche: $A =$

Volumen: $V =$



Boden:

Mantellinie:

Mantel:

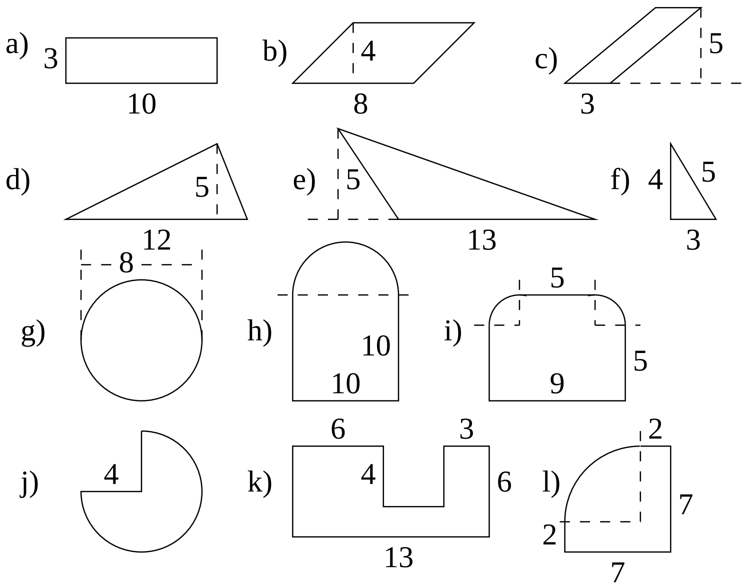
Mantelfläche:

Oberfläche:

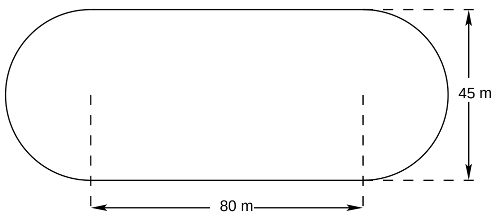
Volumen:

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:
Berechne die Fläche der folgenden Figuren (Längenangaben in cm):

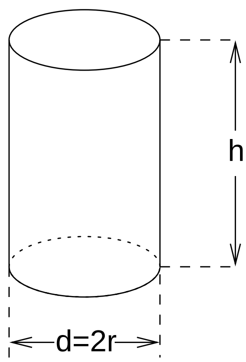


Aufgabe 2:
Berechne die Fläche des Sportplatzes:



Aufgabe 3:

Ein zylindrischer Silo der Ausmaße: Höhe $h = 10\,m$, Durchmesser $d = 3\,m$ soll gestrichen werden. (Samt Boden und Deckel.) Für wieviel Quadratmeter muß Farbe gekauft werden?



Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1:

Ein Labortisch ist $8\,m$ lang und $1,2\,m$ breit. Er soll mit quadratischen Fliesen der Kantenlänge $20\,cm$ belegt werden.

a) Wird ein Fliesenschneider benötigt?
b) Wieviele Fliesen werden benötigt?

Aufgabe 2:

Ein Würfel der Kantenlänge $30\,cm$ soll in Würfel der Kantenlänge $5\,cm$ zersägt werden.

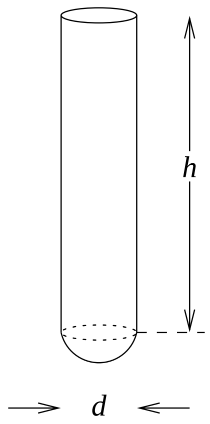
a) Wieviele ganze Würfel erhält man, bleibt ein Rest?
b) Berechne die Oberfläche des großen Würfels.
c) Welche Oberfäche haben die kleinen Würfel zusammen?

Aufgabe 3:

Ein Reagenzglas hat im Querschnitt die folgenden Abmessungen:

$$h = 20\,cm, \quad d = 1\,cm$$

Berechne seine (äußere) Oberfläche.
Berechne sein Fassungsvermögen.



Aufgabe 4:

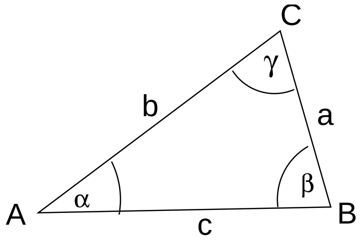
Wieviel Liter faßt ein Becherglass mit einem Innendurchmesser von $20\,cm$ und einer Füllhöhe von $32,5\,cm$?

Aufgabe 5:

Ein zylindrischer Wasserbehälter hat einen Innendurchmesser von $60\,cm$ und eine Höhe von $75\,cm$.
Wieviel Liter Wasser faßt der Behälter?

5.4. **Dreiecksgeometrie.**

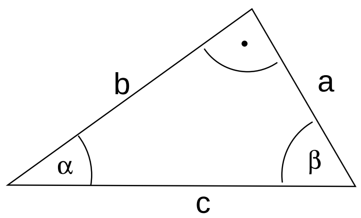
beliebiges Dreieck:



Winkelsumme im Dreieck

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

rechtwinkliges Dreieck:



Satz von Pythagoras: *Ein Dreieck mit den Seiten a, b und c ist genau dann rechtwinklig, wenn*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Hypothenuse: c
Katheten: a und b
Ankathete bezüglich α: b
Gegenkathete bezüglich α: a

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c} = \sin\alpha$$
$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c} = \cos\alpha$$
$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha$$

Für beliebige Dreiecke gelten:
Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie ein Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen. Welche der Dreiecke scheinen Rechtwinklig zu sein? Überprüfen Sie Ihre Vermutung durch Rechnung.

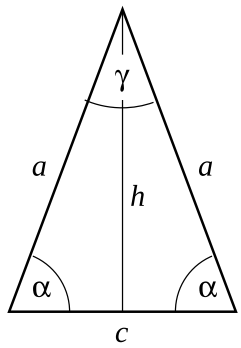
a) $5\,\text{cm},\ 12\,\text{cm},\ 13\,\text{cm}$

b) $4\,\text{cm},\ 7\,\text{cm},\ 8\,\text{cm}$

c) $4\,\text{cm},\ 4,2\,\text{cm},\ 5,8\,\text{cm}$

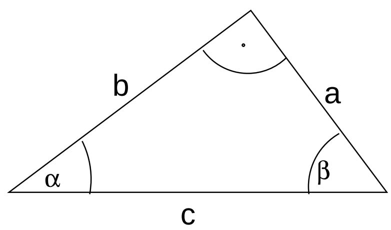
Aufgabe 2:

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit Höhe $h = 20\,\text{m}$ und Winkel $\alpha = 33°$. Berechne a, c und γ auf 2 Dezimalstellen genau.



Aufgabe 3:

Berechne die fehlenden Seiten (a, b bzw c) und Winkel (α bzw. β) der rechtwinkligen Dreiecke wie in nebenstehender Abbildung auf 1 Dezimalstelle bzw. in Grad, Minuten und Sekunden genau:



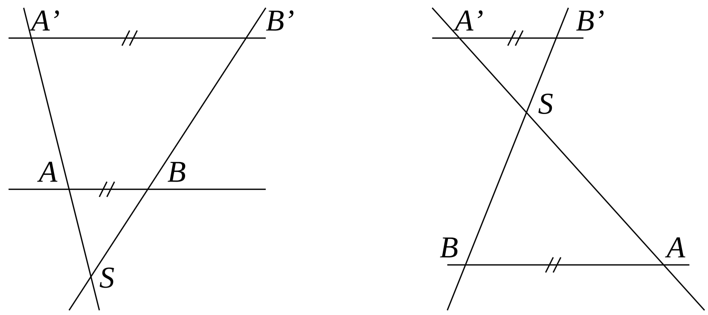
a) $a = 50\,\text{cm},\ b = 78,1\,\text{cm}$

b) $a = 40\,\text{cm},\ \alpha = 43°36'$

c) $a = 66\,\text{cm},\ c = 130\,\text{cm}$

5.5. **Strahlensatz.**

Bezeichnung: $\overline{SA}$ = Länge der Strecke vom Scheitel S bis zum Punkt A.



Für beide Figuren gilt der sogenannte

Strahlensatz:

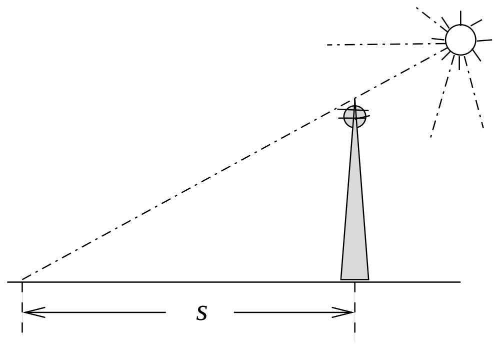
$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} \qquad\qquad \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Aufgabenblatt 10

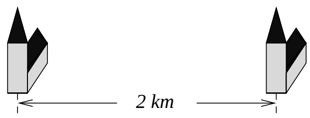
Aufgabe 1:

Ein Fernsehturm wirft einen Schatten der Länge s. Kann die Höhe des Turmes bestimmt werden?

Bestimme H für $t = 5\,\mathrm{m}, h = 2\,\mathrm{m}$ und $s = 200\,\mathrm{m}$

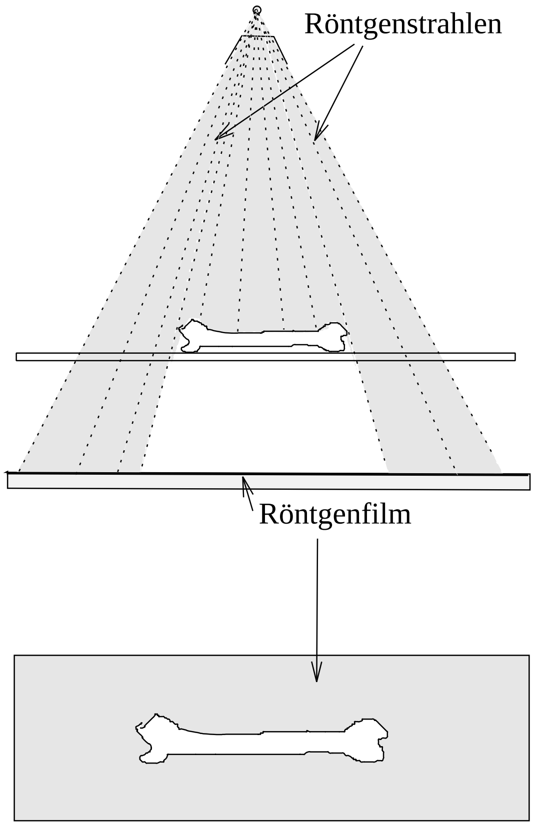


Aufgabe 2:



Wie weit ist der erste Kirchturm vom Beobachter entfernt?

Aufgabe 3:
Durchleuchtungvorrichtung



Können wir aufgrund der Abmessungen auf dem Röntgenfilm auf die tatsächlichen Abmessungen schließen?

6. Prozentrechnung, Dreisatz und Proportionalität

6.1. **Prozentrechnung. Prozent:** $\% = \frac{1}{100}$

Das Symbol % wird immer als Faktor, also multiplikativ, verwendet.

Beispiel:

4%	von	200	sind	8
Prozentsatz		Grundwert		Prozentwert
$p\%$		G		W

Zusammenhang von Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert mittels Dreisatz:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & & 200 \\ & & \\ 4\% & & \dfrac{4\% \cdot 200}{100\%} & = 8 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 100\% & & G & \\ & & & \\ p\% & & W = & \dfrac{p\% \cdot G}{100\%} = \dfrac{p \cdot G}{100} \end{array}}$$

Mit $1\% = \frac{1}{100}$ läßt sich auch schreiben:

$$\boxed{W = p\% \cdot G}$$

Nach dem Prozentsatz bzw Grundwert aufgelöst:

$$\boxed{p\% = \frac{W}{G}\,100\% \qquad G = \frac{W}{p}\,100}$$

Weitere Beispiele: Aufgabenblatt 11/1-8,14,15

6.2. **Direkte Proportionalität.**

2 Größen x und y sind direkt proportional, wenn der Quotient $\frac{x}{y} = konst.$ ist

Beispiel: 5 kg Dünger reichen für eine Fläche von 120 m^2.

a) Um welche Proportionalität handelt es sich?
b) Wieviel m^2 können mit 180 kg Dünger gedüngt werden?

c) Wieviel Dünger brauchen wir für 500 m^2?

graphische Lösung:

$$\begin{array}{ccc} \text{5 kg Dünger} & & 120\,m^2 \\ \text{180 kg Dünger} & & x \end{array} \qquad \Rightarrow x = \frac{180\,\text{kg} \cdot 120\,\text{m}^2}{5\text{kg}} = 4\,320\,m^2$$

Das ist eine Beispiel für **direkte Proportionalität**:
viel Dünger $\Leftrightarrow$ viel Quadratmeter,

$$\frac{\text{Dünger}}{\text{\#Quadratmeter}} = \text{konstant}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{5 kg Dünger} & & 120\,m^2 \\ x \text{ kg Dünger} & & 500\,m^2 \end{array} \qquad \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 500}{120}\,\text{kg} = 20{,}8\bar{3}\,\text{kg}$$

Aufgabenblatt 11/10,11,13,16

6.3. **Indirekte Proportionalität.**

2 Größen x und y sind indirekt proportional, wenn das Produkt $x \cdot y = konst.$ ist

Beispiel:
5 Pumpen entleeren ein Wasserbecken in $16,5$ Stunden. Wieviel Zeit benötigen 3 Pumpen?
5 Pumpen entleeren ein Wasserbecken in 16.5 Stunden. Wie langen brauchen 3 Pumpen?

Das ist eine Beispiel für **indirekte Proportionalität**:
viele Pumpen $\Leftrightarrow$ wenig Zeit,

$$\text{Zeit} \cdot \#\text{Pumpen} = \text{konstant}$$

graphische Lösung:

$$\begin{array}{lll} 5 \text{ Pumpen} \longleftrightarrow 16,5 \text{ Stunden} & & \\ & & \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 16,5}{3} \text{ Stunden} = 27,5\,\text{h} \\ 3 \text{ Pumpen} \longleftrightarrow \quad x & & \end{array}$$

Aufgabenblatt 11/9,12

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1:
5% von 40 € sind :

Aufgabe 2:
Sie erhalten eine Rechnung über 2 000 € mit 2% Skonto bei Zahlung innerhalb von 10 Tagen. Was müssen Sie zahlen?

Aufgabe 3:
Auf Ihren Konto erhalten Sie 4% Zinsen jährlich. Sie legen 3 000 € für ein Jahr fest zu diesem Zinssatz an. Wieviel Geld haben Sie nach einem Jahr?

Aufgabe 4:
Sie haben 100 € in Ihrer Geldbörse, davon geben Sie 20 € aus.

(1) Um wieviel Prozent hat sich Ihr Geld in der Börse verringert?
(2) Auf wieviel Prozent hat sich Ihr Geld in der Börse verringert?

Aufgabe 5:
Sie haben 100 € in Ihrer Geldbörse, am Geldautomaten heben Sie zusätzlich 20 € ab.

(1) Um wieviel Prozent hat sich Ihr Bargeld erhöht?
(2) Auf wieviel Prozent hat sich Ihr Bargeld erhöht?

Aufgabe 6:
Bei einem Körpergewicht $m = 70\,\mathrm{kg}$ und der Größe $l = 175\,\mathrm{cm}$ ist die Körperoberfläche nach den beiden Bu-Bois Formeln:

$$A = \left(\frac{70\,\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}}\right)^{0{,}425} \left(\frac{175\,\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}}\right)^{0{,}725} \cdot 71,84\,\mathrm{cm}^2 = 18\,481,43\,\mathrm{cm}^2$$

$$A' = \sqrt{70 \cdot 175} \cdot 167,2\,\mathrm{cm}^2 = 18\,505,65\,\mathrm{cm}^2$$

Um wieviel Prozent weicht A von A' ab?

Aufgabe 7:
Wielviel Gramm Glucose sind in 290 g einer 0, 9%-tigen Glucoselösung enthalten?

Aufgabe 8:
Bestimme die Zusammensetzung von 2,5 kg einer 65%-tigen wässrigen Schwefelsäurelösung.

Aufgaben zur Proportionalität:

Aufgabe 9:

8 Pumpen entleeren ein Wasserbecken in 3 Stunden. Wie langen brauchen 5 Pumpen?

Aufgabe 10:

100 g Wasser lösen 45 g Salz. Wieviel Salz können von 240 g Wasser gelöst werden (bei gleicher Temperatur)?

Aufgabe 11:

100 g Wasser lösen bei 20° C eine Stoffportion von 88 g Natriumnitrat. Wieviel Gramm Natriumnitrat werden bei gleicher Temperatur von 65 g Wasser gelöst?

Aufgabe 12:

Die Füllung eines Heizöltanks reicht bei Betrieb eines Brenners 360 Stunden. Wie lange würde die Füllung beim gleichzeitigen Betrieb von 5 Brennern ausreichen?

Aufgabe 13:

10 kg Dünger reichen für eine Fläche von 220 m^2.

a) Welche Proportionalität?

b) Wieviel m^2 können mit 180 kg Dünger gedüngt werden?

c) Wieviel Dünger brauchen wir für 500 m^2?

Aufgabe 14:

Für ein Sparkonto zahlt die Bank 4, 5% Zinsen p.a.. Wie hoch sind die Zinsen nach einem Jahr bei einem Guthaben von 340 €?

Aufgabe 15:

Eine Schulklasse besteht aus 12 Mädchen und 15 Buben. Drücken Sie diesen Sachverhalt in Prozent aus.

Aufgabe 16:

Ein PKW verbraucht 11, 4 l/100 km. Wieviel kann er mit einer Tankfüllung von 40 l zurücklegen?

Masse eines Stoffes	(m)	Einheit kg bzw g
Stoffmenge	(n)	Einheit *mol*

Definition 7.1. 1 mol *ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 g des Kohlenstoffnuklids* ^{12}C.

Die Anzahl der Teilchen in 1 mol eines jeden Stoffes ist gleich.
D.h. zum Beispiel: die Anzahl der Teilchen in 1 mol Eisen (Fe) ist gleich der Anzahl von Teilchen in 1 mol Wasser (H_2O). Diese Anzahl wird angegeben durch die:
Avogadrosche Konstante: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

$$\boxed{\#\text{Teilchen} = n \cdot N_A}$$

Beispiel: Gegeben sei 2 mol H_2O Wasser, d.h.: $n(H_2O) = 2\,\mathrm{mol}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Anzahl der Teilchen/Moleküle} &= n(H_2O) \cdot N_A \\ &= 2\,\mathrm{mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \\ &\simeq 12 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$ □

Frage: Wieviel Moleküle sind in 3 mol $NAOH$?

Molare Masse eines Stoffes $(M) = \frac{\text{Masse}}{\text{Stoffmenge}}$ also $M = \frac{m}{n}$ Einheit $\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
Die Molare Masse findet man im **Periodensystem:**

Wasserstoff	H	$M(H) = 1,008\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol}$
Sauerstoff	O	$M(O) = 16\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol}$

Damit berechnet sich die Molare Masse bei Molekülen:
Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Wasser}\,(H_2O): \quad M(H_2O) &= 2M(H) + M(O) \\ &= 2 \cdot 1,008\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol} + 16\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol} \\ &= 18,016\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol} \end{aligned}$$

D.h. 1 mol Wasser wiegt ungefähr 18 g. □
Beispiel:

$$\text{Sauerstoff}\,(O_2): \quad M(O_2) = 2M(O) = 2 \cdot 16\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol} = 32\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{mol}$$

Aufgabenblatt 12/1-5, 13/1

Molare Masse, Masse und Stoffmenge

$$\text{Molare Masse} \quad M = \frac{m}{n}$$
$$\text{Stoffmenge} \quad n = \frac{m}{M}$$
$$\text{Masse} \quad m = nM$$

Beispiel:
Gegeben seien 100 g Kupfer (Cu). Berechne die Stoffmenge.
$m(Cu) = 100\,\text{g}, \quad M(Cu) = 64\,\text{g}\,/\,\text{mol}$

$$\Rightarrow n(Cu) = \frac{m(Cu)}{M(Cu)} = \frac{100\,\text{g}}{64\,\text{g}\,/\,\text{mol}} = 1,6\,\text{mol}$$

mit Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 64\,\text{g}\ Cu & \text{sind} & 1\,\text{mol} \\ 100\,\text{g}\ Cu & \text{sind} & x\,\text{mol} \end{array} \quad \Rightarrow x\,\text{mol} = \frac{100\,\text{g} \cdot 1\,\text{mol}}{64\,\text{g}} = 1,6\,\text{mol} \qquad \square$$

Aufgabenblatt 12/6, Blatt 13/2

Beispiel:
Gegeben seien $0,43\,\text{mmol}$ Natrium (Na), also

$$\begin{aligned} n(Na) &= 0,43\,\text{mmol} = 0,43 \cdot 10^{-3}\,\text{mol} \\ M(Na) &= 23\,\text{g}\,/\,\text{mol} \\ \Rightarrow \quad m(Na) &= n(Na) \cdot M(Na) \\ &= 0,43 \cdot 23 \cdot 10^{-3} g = 9,89 \cdot 10^{-3} g = 9,89\,\text{mg} \end{aligned}$$

Mit Dreisatz:

$$\begin{array}{lll} 1\,\text{mol}\ Na & \text{wiegen} & 23\,\text{g} \\ 0,43\,\text{mol}\ Na & \text{wiegen} & x\,\text{g} \end{array} \quad \Rightarrow x\,\text{g} = \frac{0{,}43\,\text{mol} \cdot 23\,\text{g}}{1\,\text{mol}} = 9,89\,\text{mg} \qquad \square$$

Aufgabenblatt 12/7-12, Blatt 13/3

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1:
Aus wieviel Molekülen besteht eine Portion von 2 mol H_2O Wasser?

Aufgabe 2:
Wieviel Moleküle sind in 3 mol $NaOH$?

Aufgabe 3:
Wie schwer ist 1 mol Wasser?

Aufgabe 4:
Was ist die Molare Masse von Sauerstoff O_2?

Aufgabe 5:
Was ist die Molare Masse von Calciumcarbonat $CaCO_3$?

Aufgabe 6:
Gegeben seien 100 g Kupfer (Cu). Berechne die Stoffmenge.

Aufgabe 7:
Gegeben seien $0,43$ mmol Natrium (Na), berechnen Sie die Masse.

Aufgabe 8:
Berechne die Molare Masse von a) Salpetersäure (HNO_3), b) Methan (CH_4), und c) Phenol (C_6H_5OH).

Aufgabe 9:
Wieviel Gramm Kohlenstoff sind in 11g Kohlendioxyd (CO_2)?

Aufgabe 10:
Wieviel Gramm sind a) 3 Mol Schwefelsäure (H_2SO_4) und b) 5 Mol Salpetersäure (HNO_3)?

Aufgabe 11:
Wieviel Mol sind 180g Wasser (H_2O)?

Aufgabe 12:
Wieviel Gramm sind $12,04 \cdot 10^{23}$ Moleküle Sauerstoff (O_2) bzw $12,04 \cdot 10^{23}$ Moleküle Ozon (O_3)?

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 1:
Berechne die Molare Masse von:

a) Aluminiumoxid Al_2O_3,

b) Phenol C_6H_5OH,

c) Nitrobenzol $C_6H_5NO_2$,

d) Sauerstoff O_2,

e) Stickstoff N_2,

f) Natriumhydrogencarbonat $NaHCO_3$

g) Magnesiumammoniumphosphat-6-hydrat $Mg(NH_4)PO_4 \cdot 6H_2O$

h) Harnstoff $CO(NH_2)_2$,

Aufgabe 2:
Berechne die Stoffmenge von:

a) $1,118\,mg$ Silber Ag

b) $35\,\mathrm{kg}$ Aluminium Al

c) $65\,\mathrm{g}$ Wasserstoff H_2

d) $90\,mg$ Kohlenstoff C

e) $16,5\,\mathrm{kg}$ Iod I_2

Aufgabe 3:
Berechne die Masse von:

a) $3,5\,\mathrm{mol}$ Cobalt Co

b) $0,2\,\mathrm{mmol}$ Uran U

c) $4,1\,\mathrm{mol}$ Chlor Cl_2

d) $51\,\mathrm{mol}$ Wasserstoff H_2

e) $1,83\,mol$ Mangan Mn

8. Mischungsrechnen

8.1. Massenanteile.

Was bedeutet: 10%tige wässrige Salzsäure Lösung ?

Die Lösung ist eine Mischung aus Wasser und Salzsäure so daß in 100 g Lösung 10 g Salzsäure und 100 g −10 g = 90 g Wasser sind.

Massenanteil (=Konzentration) (w) eines Stoffes in einer Lösung:

$$w = w(\text{g.S.}) = \frac{m(g.S.)}{m(L)}\,(\cdot 100\%) \tag{1}$$

Hierbei meint $g.S.$ =gelöster Stoff, L die Lösung und $m(L)$ die Gesamtmasse der Lösung.

Beispiel:
Was bedeutet: 5%ige Kochsalzlösung?

$w = w(NaCL) = 5\%$, also enthalten 1 kg Lösung gerade
$1\,\text{kg} \cdot w = 1\,\text{kg} \cdot 5 \cdot \frac{1}{100} = 50\,\text{g}$ Kochsalz. □

Beispiel:
Wieviel Kochsalz sind in 200 g 5%iger Kochsalzlösung?
$m(NaCl) = w \cdot m(L) = 5 \cdot \frac{1}{100} \cdot 200\,\text{g} = 10\,\text{g}$ □

Beispiel:
15 g Zucker sollen in Wasser zu 5%iger Zuckerlösung aufgelöst werden. Wieviel Wasser brauchen wir, wieviel Zuckerlösung erhalten wir?

gegeben: $w = 5\%, \quad m(Zucker) = 15\,\text{g}$,
gesucht: $m(L)$ und $m(H_2O)$.

$$m(L) = \frac{m(g.S.)}{w} = \frac{15\,\text{g}}{5\frac{1}{100}} = 300\,\text{g}$$
$$m(H_2O) = m(L) - m(Zucker) = 300\,\text{g} - 15\,\text{g} = 285\,\text{g}$$

Mit Dreisatz:

5 g Zucker	in	100 g Lösung	$\Rightarrow \quad x = \frac{15\,\text{g}\cdot 100\,\text{g}}{5\,\text{g}} = 300\,\text{g}$ □
15 g Zucker	in	x Lösung	

Wie man an den Beispielen sieht ist die Formel (1) für den Massenanteil auch in anderer Form wichtig:

$$w(g.S.) = \frac{m(g.S.)}{m(L)} \tag{2}$$
$$m(L) = \frac{m(g.S.)}{w(g.S.)} \tag{3}$$
$$m(g.S.) = w(g.S.) \cdot m(L) \tag{4}$$

Aufgabenblatt 14

Aufgabe 1:
Was bedeutet: $7,8\%$ige Kochsalzlösung?

Aufgabe 2:
Wieviel Kochsalz sind in $500\,\mathrm{g}$ $7,8\%$iger Kochsalzlösung?

Aufgabe 3:
$8,5\,\mathrm{g}$ Zucker sollen in Wasser zu 2%iger Zuckerlösung aufgelöst werden. Wieviel Wasser brauchen wir, wieviel Zuckerlösung erhalten wir?

Aufgabe 4:
Wieviel Bariumhydroxid ($Ba(OH)_2$) sind in $103,48\,\mathrm{g}$, $3,36\%$igem Barytwasser (wässrige Bariumhydroxidlösung)?

Aufgabe 5:
Wielviel Gramm Glucose sind in 290 g einer $0,9\%$-tigen Glucoselösung enthalten?

Aufgabe 6:
Bestimme die Zusammensetzung von 2,5 kg einer 65%-tigen wässrigen Schwefelsäurelösung.

8.2. **Mischen von Lösungen.**

300 g Salpetersäure der Konzentration 60% (Lösung L_1) und 150 g Salpeters. der Konzentration 20% (Lösung L_2) werden zu einer Lösung L gemischt. Welche Konzentration bzw. Masse hat L?

L_1	$m_1 = 300\,\text{g}$	$w_1 = 60\%$	$m(S_1) =$	$m_1 w_1$	$= 300\,\text{g}\,\frac{60}{100} = 180\,\text{g}$
$+$	$+$			$+$	
L_2	$m_2 = 150\,\text{g}$	$w_2 = 20\%$	$m(S_2) =$	$m_2 w_2$	$= 150\,\text{g}\,\frac{20}{100} = 30\,\text{g}$
L	$m = 450\,\text{g}$		$m(S) =$	$m_1 w_1 + m_2 w_2$	$= 210\,\text{g}$

Das läßt sich in einer Formel zusammenfassen:

$$\boxed{w(L) = \frac{m(S_1) + m(S_2)}{m(L)} = \frac{w(L_1)m(L_1) + w(L_2)m(L_2)}{m(L_1) + m(L_2)}}$$

Mischungsformel:

Lösung L_1 habe die Masse m_1 und den Massenanteil w_1,
Lösung L_2 habe die Masse m_2 und den Massenanteil w_2, und die Mischung L aus L_1 und L_2 habe die Masse m und den Massenanteil w.
Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Lösungen:} & \text{Lösung } L_1 & + & \text{Lösung } L_2 = \text{Lösung } L \\
\text{Massen:} & m_1 & + & m_2 = m \\
\text{Masse g. S.:} & w_1 m_1 & + & w_2 m_2 = wm = m(\text{g.St.}) \\
\text{Massenanteil:} & w & & = \dfrac{w_1 m_1 + w_2 m_2}{m}
\end{array}$$

Beispiel:

Sie mischen 2 kg 9%ige Salzsäure mit 1 kg 40%iger Salzsäure. Was erhalten Sie?

$$\begin{aligned}
m &= m_1 + m_2 = 2\,\text{kg} + 1\,\text{kg} = 3\,\text{kg} \\
m(\text{g.St.}) &= w_1 m_1 + w_2 m_2 = 2\,\text{kg} \cdot 9\% + 1\,\text{kg} \cdot 40\% = 580\,\text{g} \\
w &= \frac{w_1 m_1 + w_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\,\text{kg} \cdot 9\% + 1\,\text{kg} \cdot 40\%}{3\,\text{kg}} = 19{,}33\%
\end{aligned}$$

□

8.3. **Mischungsverhältnis.**
Beispiel:
4%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu $12,5$%-iger Kalilauge gemischt werden. Man bestimme das benötigte Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$.
Lösung:
Masse von L_i ist m_i. Dann ist die Masse m von der Mischung L, $m = m_1 + m_2$ und es gilt:

$$\begin{aligned} 4\% m_1 + 29\% m_2 &= 12,5\%(m_1 + m_2) && \mid \cdot \tfrac{1}{m_2} \cdot \tfrac{1}{\%} \\ 4\tfrac{m_1}{m_2} + 20 &= 12,5\Big(\frac{m_1}{m_2} + 1\Big) \\ 20 - 12,5 &= (12,5 - 4)\frac{m_1}{m_2} \\ \tfrac{m_1}{m_2} &= \frac{|w_2 - w|}{|w - w_1|} = \tfrac{20-12,5}{12,5-4} = \tfrac{15}{17} \end{aligned}$$

Das Massenverhältnis ist $\frac{m_1}{m_2} = \frac{15}{17}$, also 15 Teile L_1 und 17 Teile L_2 werden benötigt.
Mischungskreuz:

$$\begin{tikzcd} 4\% \arrow[dr] & & {} \\ & 12,5\% \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 20\% \arrow[ur] & & {} \end{tikzcd} \qquad \frac{|20 - 12,5|}{|12,5 - 4|} = \frac{15}{17} = \frac{m_1}{m_2}$$

also 15 Teile Lösung 1 und 17 Teile Lösung 2. □

Mischungskreuz allgemein:

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[dr, "-"] & & {} \\ & w \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ w_2 \arrow[ur, "-"] & & {} \end{tikzcd} \qquad \frac{|w_2 - w|}{|w - w_1|} = \frac{m_1}{m_2}$$

⇒ *Aufgabenblatt 15, Aufgabe 3*

8.4. **Zu vorgegebenem Massenanteil die Massen m_i bestimmen.**
Beispiel:
14%-ige und $1,6$%-ige Magnesiumchloridlösung sollen zu $1,8\,\text{kg}$ 10%-iger Magnesiumchloridlösung gemischt werden. Welche Massen m_1 und m_2 an Ausgangslösungen werden benötigt?
Lösung:
Wie oben berechne man zuerst das Massenverhältnis:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{10 - 1,6}{14 - 10} = 2,1$$

Es werden verlangt:

$$1,8\,\text{kg} = m = m_1 + m_2 = m_2(\frac{m_1}{m_2} + 1) = m_2(2,1 + 1)$$

$$m_2 = \frac{m}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{1,8\,\text{kg}}{3,1} = 580,64\,\text{g}$$

$$m_1 = m - m_2 = 1,8\,\text{kg} - 580,64\,\text{g} = 1,22\,\text{kg}$$

Mischungskreuz:

L_1	14% $\searrow$		$\nearrow$ $\lvert 1,6 - 10\rvert = 8,4$	Teile
		10%	$+$	
L_2	$1,6$% $\nearrow$		$\searrow$ $\lvert 14 - 10\rvert = 4$	Teile
L	10%		$12,4$	Teile
L_1	$\frac{1,8\,\text{kg}\cdot 8,4}{12,5}$	$= 1,22\,\text{kg}$	$8,4$	Teile
L_2	$\frac{1,8\,\text{kg}\cdot 4}{12,5}$	$= 0,58\,\text{kg}$	4	Teile

$\square$

Allgemein:

L_1	m_1	w_1 $\searrow$		$\nearrow$ $\lvert w_2 - w\rvert = t_1$	Teile
			w	$+$	
L_2	m_2	w_2 $\nearrow$		$\searrow$ $\lvert w - w_1\rvert = t_2$	Teile
L	m			$t_1 + t_2 = t$	Teile
L_1	$m_1 =$	$\frac{m\cdot t_1}{t}$		$t_1 = \frac{t_1}{t}$	Teile
L_2	$m_2 =$	$\frac{m\cdot t_2}{t}$		$t_2 = \frac{t_2}{t}$	Teile

Aufgabenblatt 15

Aufgabe 1:
300 g Salpetersäure der Konzentration 60% (Lösung L_1) und 150 g Salpeters. der Konzentration 20% (Lösung L_2) werden zu einer Lösung L gemischt. Welche Konzentration bzw. Masse hat L?

Aufgabe 2:
Berechne Masse und Massenanteil des gelösten Stoffes in der Mischung von

a) 4 *kg* 10%-tige und 1,3 *kg* 37%-tige Salzsäure.
b) 4 *kg* 7,2%-tige und 1,3 *kg* 37%-tige Salzsäure.
c) 2,7 *kg* 5%-tige und 275 g 85%-tige und 1,06 *kg* 14%-tige Phosphorsäure.
d) 0,9 *kg* 99,8%-tige und 440 g 9,6%-tige und 88 g 43%-tige Essigsäure.
e) 0,9 *kg* 55%-tige und 440 g 9,6%-tige und 88 g 43%-tige Essigsäure.
f) 650 g 45,5%-tige und 1,2 *kg* 10%-tige und 870 g 15%-tige und 3,2 *kg* 2%-tige Natronlauge.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Massenverhältnisse:

a) 7,5%-ige und 20%-ige Kalilauge sollen zu 12,5%-iger Kalilauge gemischt werden.
b) 37%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 11%-iger Salzsäure gemischt werden.
c) 10%-ige und 2%-ige Salzsäure sollen zu 7%-iger Salzsäure gemischt werden.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die benötigen Massen der Ausgangslösungen:

a) 5%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu 750 g 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.
b) 16%-ige und 60%-ige Natriumhydroxidlösung sollen zu 750 g 35%-iger Natriumhydroxidlösung gemischt werden.
c) 12%-ige und 1,6%-ige Magnesiumchloridlösung sollen zu 1,8 kg 10%-iger Magnesiumchloridlösung gemischt werden.
d) 6,2%-ige und 0,09%-ige Kaliumdichromatlösung sollen zu 670 g 4%-iger Kaliumdichromatlösung gemischt werden.

Beispiel:
Aus dem Rechenbuch des Abu Zacharjia el Hassar:
Bei einem Fisch nimmt der Kopf ein Drittel und der Schwanz ein Viertel seines Gewichtes ein, das Mittelstück wiegt 10 Pfund. Wieviel wiegt der Fisch?
Lösung:
Der Fisch besteht aus Kopf, Mittelstück und Schwanz. Ist x das Gewicht des Fisches, also gilt:

$$x = \frac{1}{3}x + 10 + \frac{1}{4}x$$

Auflösen nach x liefert:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x &= 10 \\ x(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) &= 10 \\ x = \frac{10}{(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} &= \frac{10}{\frac{12-4-3}{12}} = \frac{10 \cdot 12}{5} = 24 \end{aligned}$$

Der Fisch wiegt also 24 Pfund. □

Hierbei handelt es sich um eine sogenannte *algebraische* Gleichung

Die einfachsten algebraischen Gleichungen sind die:

Lineare Gleichungen: $ax = b$ mit $a \neq 0$.

Die Gleichung aus Aufgabe 11 ist linear.

Lösung linearer Gleichungen: $x = \frac{b}{a}$

Die Aufgaben auf dem nächsten Aufgabenblatt lassen sich durch Äquivalenzumformungen alle auf lineare Gleichungen zurückführen. Bei Gleichungen mit x im Nenner berücksichtigen Sie bitte auch die Definitionsmenge.

Aufgabenblatt 16

Aufgabe 1:

a) $x + 47 = 81$

b) $x - 12 = 51$

c) $23 + x = 38$

d) $x - 44 = 44$

e) $y - 12 = 30$

f) $23 + z = -55$

g) $x + 16 = 7$

h) $x - 33 = 0$

Aufgabe 2:

a) $7 + (x - 3) = 14 + 10$

b) $2 - (3 - x) = x - (2 + x)$

c) $29 - 41 = 19 - (-x + 12)$

d) $(9x + 2) - 8x = (9x + 12) - 9x$

Aufgabe 3:

a) $3x - 4 = 8$

b) $15x + 3 = 6x$

c) $5x - 36 = 22 + 4x$

d) $16 + 9x = 8x + 18$

e) $24 - 3x = 26 - 4x$

f) $13y + 5 = 40 + 12y + 25$

g) $6 + 11x + 2 = 6x + (8 + 4x)$

h) $(7 + 3)x = 24 + 9x$

Aufgabe 4:

a) $\frac{x}{c} - b = a$

b) $\frac{x}{p} + 1 = \frac{q}{p}$

c) $cx - d = x$

d) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

e) $(p + x)(q + x) = (p - x)(q - x)$

f) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{a}{b}$

g) $x(a - b) = a(b - x)$

h) $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = m - n$

i) $ax - bx = cx$

Aufgabe 5:

Aus dem Rechenbuch des Inders Bhaskara (ca.1150 n.Chr.):
Von einem Schwarm Bienen läßt sich ein Fünftel auf einer Kadamabablüte, ein Drittel auf einer Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutaja; eine Biene blieb übrig, welche in der Luft hin und her schwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandanus. Sage mir nun die Anzahl der Bienen.

Aufgabe 6:

Auf einem Dach sitzen 5 Spatzen. Otto erschießt 2 davon. Wieviele bleiben sitzen?

10. Lineare Funktionen

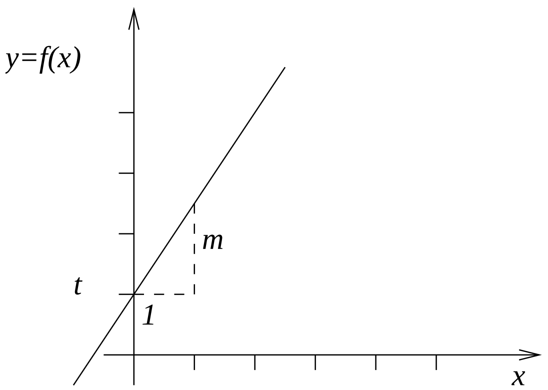
Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen. Was fällt auf:

	y-Achsenabschnitt
$f(x) = 2x - 1$	-1
$f(x) = 2x$	0
$f(x) = 2x + 2$	2
$f(x) = 2x + 5$	5

	Steigung
$f(x) = -x - 1$	-1
$f(x) = x - 1$	1
$f(x) = 2x - 1$	2
$f(x) = 5x - 1$	5

lineare Funktion	$y = f(x) = mx + t$
Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Graph	Gerade
Schnittpunkt der Geraden mit y-Achse	$f(0) = t$
Steigung	m

□



Eine Gerade wird durch 2 Punkte festgelegt:
Beispiel: Gerade durch $P_1 = (1, 2)$ und $P_2 = (3, 3)$
$\Rightarrow$ Zeichnen
$\Rightarrow$ Was ist die Funktionvorschrift $y = f(x) = mx + t$?
$\Rightarrow$ Steigungsdreieck einzeichnen

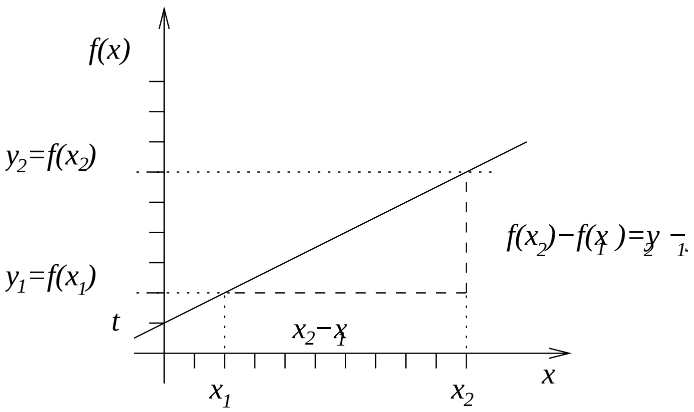
$$m = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ y-Achsenabschnitt t durch einsetzen von P_1 bestimmen:

$$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + t = 2 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$\Rightarrow$ Lösung $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. $\square$

Allgemein:



Steigung:	$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Durchschnitt mit y-Achse:	$f(0) = t = y_1 - mx_1$
Funktionsgleichung:	$f(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\, x + t$

Aufgabenblatt 17

Lineare Funktionen

Aufgabe 1:

Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen der linearen Funktionen:

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = 2x + 2$
c) $f(x) = 2x + 3$
d) $f(x) = 2x$
e) $f(x) = 2x - 1$
f) $f(x) = x + 1$
g) $f(x) = 3x + 1$
h) $f(x) = -x + 1$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte P und Q geht.

a) $P(1|4), \quad Q(4|10)$

b) $P(1|3), \quad Q(-1|-5)$

c) $P(0|-2), \quad Q(3|1)$

d) $P(-1|-7), \quad Q(1|7)$

e) $P(2|7), \quad Q(5|25)$

f) $P(1|0), \quad Q(2|30)$

Aufgabe 3:

Zeichnen Sie ein Steudiagramm, und eine möglichst gut angepasste Gerade. Was ist die Funktionsgleichung der Geraden?

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-0,5	0,8	3	5,1	6,9	9,4	10,7	13,01	14,99

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,8	3,2	4,1	5,02	5,98	6,89	8,04	8,97	10,3

c)

x	15	17	22	33	37	40	50
y	14,20	14,34	14,89	15,78	16,23	16,46	17,03

d)

x	1	3	4	6	8	12	15	20
y	14	12.34	12.02	10.56	11	8.41	6.98	4.23

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Regressionsgeraden zu den Steudiagrammen aus Aufgabe 3 nach den Formeln:

$$\text{Regressionsgerade } R\text{:} \quad y = f(x) = B \cdot x + A$$

mit

$$B = \frac{\frac{1}{n}\sum_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2}$$

$$A := \frac{\bar{x} \cdot \frac{1}{n}(\sum_i x_i y_i) - \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{1}{n}\sum_i y_i - B \cdot \frac{1}{n}\sum_i x_i$$

Beispiel:
Ein Kapital von 1000 € wird mit $p = 7,5\%$ p.a. verzinst.
Auf wieviel ist das Kapital nach 10 Jahren angewachsen?

Anfangskapital	$K_0 = 1000$ €
Kapital nach einem Jahr	$K_1 = K_0 + p \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + p)$
Kapital nach 2 Jahren	$K_2 = K_1 + p \cdot K_1 = K_1 \cdot (1 + p)$
$\vdots$	$\vdots$
Kapital nach n Jahren	$K_n = K_{n-1} \cdot (1 + p)$

Sukzessives Einsetzen bringt:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n}$$

Mit unseren Zahlen:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot (1 + p)^n \\ &= 1000 \cdot (1 + 7,5\%)^n \text{ €} \\ &= 1000 \cdot (1 + \tfrac{7,5}{100})^n \text{ €} \\ &= 1000 \cdot 1,075^n \\ K_{10} &= 1000 \cdot 1,075^{10} = 2\,061,03 \text{ €} \end{aligned}$$

Wie lange müssen Sie warten, bis das Kapital auf 3 000 € angewachsen ist?
Dazu muss man die folgende Gleichung lösen:

$$K_n = 1000 \cdot 1,075^n = 3\,000$$

$$1,075^n = \frac{3\,000}{1\,000} = 3$$

$$n = \log_{1,075} 3 = \frac{\log 3}{\log 1,075} = 15,19$$

Man muß also etwas über 15 Jahre warten.
Allgemeine Lösung:

$$\boxed{n = \frac{\lg K_n \cdot \lg K_0}{\lg(1 + p)}}$$

$\square$

Beispiele:

$$10^x = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

$$2^x = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \sqrt[3]{64} = 4 \\ 4^3 = 64 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \log_4 64 = 3 \end{tikzcd}$$

Problem: Finde die Lösung der Gleichung:

$$a^x = b, \quad \text{mit } a, b > 0$$

Logarithmus:
$\log_a b$ ist die (einzige) Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a, b > 0$. Also

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$\log_a b$ heißt *Logarithmus von b zur Basis a.*

Beispiele:

$\log_{10} 10\,000 = 4$	denn $10\,000 = 10^4$
$\log_{10} 0,1 = -1$	denn $10^{-1} = 0,1$
$\log_5 \frac{1}{25} = -2$	denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Spezielle Logarithmen:

$\log = \mathrm{Lg} = \lg = \mathrm{Log} = \log_{10}$ Zehnerlogarithmus

$\ln = \log_e$ natürlicher Logarithmus

Definition 11.1. *Der pH-Wert einen Säure bzw Lauge ist der negative Zehnerlogarithmus der Wasserstoffionenkonzentration, gemessen in Mol pro Liter:*

$$pH = -\lg c|H^+|$$

Beispiel:
Salzsäure der H^+-Konzentration $0,2\,\mathrm{mol}\,/l$ hat (bei vollständiger Dissoziation) den pH-Wert:

$$\mathrm{pH} = -\lg(0,2) = -\lg(2 \cdot 10^{-1}) = -\lg 2 + 1 = 0,7$$

□

Beispiel:
Welchen pH-Wert hat eine 1 mol / l Salzsäure (bei vollständiger Dissoziation)?

$$pH = -\lg 1 = 0$$

Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \tfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a \left(b^c\right) = c \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \tfrac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Rechnen mit Logarithmen:

$$\log_7 3 = \tfrac{\log 3}{\log 7} = \tfrac{\ln 3}{\ln 7} \simeq 0,5646$$

$$\log_5 (4 \cdot 7 \cdot 3^9) = \log_5 4 + \log_5 7 + 9 \cdot \log_5 3 = \tfrac{\log 4 + \log 7 + 9 \log 3}{\log 5} \simeq 8,2139$$

$$\log_7 (3 \cdot 5^{-3}) = \log_7 3 - 3 \log_7 5 = \tfrac{\ln 3 - 3 \ln 5}{\ln 7} \simeq -1,92$$

Aufgabenblatt 18

Aufgabe 1:
Ein Kapital von 500 € wird mit $p = 4,5\%$ p.a. verzinst.
Auf wieviel ist das Kapital nach 90 Jahren angewachsen?
Wie lange müssen Sie warten, bis das Kapital auf 1 000 € angewachsen ist?

Aufgabe 2:
Berechnen Sie den pH-Wert (bei vollständiger Dissoziation) von

a) $1\,\mathrm{mol}\,/l$ Säure,
b) $0,1\,\mathrm{mol}\,/l$ Säure,
c) $0,0003\,\mathrm{mol}\,/l$ Säure,

Aufgabe 3:
Berechnen Sie ohne Taschenrechner

a) $\log_{10} 100$
b) $\log_2 8$
c) $\log_{10} 1000$
d) $\log_2 0,125$
e) $\log_3 9$
f) $\log_2 16$

Aufgabe 4:

a) $\ln e^2$
b) $\ln e^{-1}$
c) $\ln \sqrt{e}$
d) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

Aufgabe 5:

a) $\log x + \log y$
b) $\log x - \log y$
c) $2 \log u + 3 \log v$
d) $\frac{1}{2} \log c$
e) $\frac{2}{3} \log x$
f) $6 \log \sqrt{x}$
g) $3 \log a - 2 \log b - 5 \log c$
h) $-\log a - 2 \log b - \frac{1}{3} \log c$

Aufgabenblatt 19

Aufgabe 1:
Berechnen Sie ohne Taschenrechner (Hinweis: $\lg 2 = 0,301$)

a) $\lg 200$
b) $\lg 0,2$
c) $\lg 20$

Aufgabe 2:
Lösen Sie die folgenen Gleichungen (ohne Taschenrechner):

a) $2^x = 32$
b) $10^x = 10000$
c) $10^y = 0,001$
d) $e^z = 1$
e) $2^z = 1024$

Aufgabe 3:
Man berechne mit Hilfe des Taschenrechners

a) $\log_7 13$
b) $\log 111$
c) $\log_{12} \sqrt{3}$
d) $\ln 3$
e) $\ln\left(2^6\right)$

Aufgabe 4:

a) $\log_2 8$
b) $\log_4 2$
c) $\log_4 \sqrt{4}$
d) $\log_4(2 \cdot 4)$
e) $\log_4 8$
f) $\log_8 4$
g) $\log_2(4\sqrt{2})$
h) $\log_6 \sqrt{6}$
i) $\log_7 7^3$
j) $\log_7 7^{\frac{3}{4}}$

Aufgabenblatt 20

Aufgabe 1:
Formen Sie mit Hilfe der Logarithmusgesetze um

a) $\lg \frac{ax}{b}$

b) $\log_a \frac{1}{x^2 a^3}$

c) $\log \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$

d) $\log_3(7u^2x^3)$

e) $\lg abc$

f) $\log_3 \frac{4}{9x^5}$

g) $\lg(3a^7 \cdot 6b^3 \cdot 2c)$

h) $\lg[(ab)^3 \cdot c^{\frac{1}{2}}]$

Aufgabe 2:
Drücken Sie durch einen Logarithmusterm aus:

a) $2\lg x + 3\lg y - \lg z$

b) $-\ln u - 2\ln v - \frac{1}{3}\ln w$

c) $2(\log x - \log y)$

d) $\frac{1}{2}(\lg u - 3\lg v)$

e) $\log x - \frac{1}{2}(\log y + 2\log x)$

f) $\frac{1}{4}\log_a(b+c) - \frac{1}{3}\log_a(b-c)$

g) $\log_a p - \frac{1}{2}\log_a q + \frac{1}{4}\log_a r$

h) $3\log_a b + \frac{1}{2}\log_a(b+x)$

11.1. **Radioaktiver Zerfall.**

Radioaktiver Zerfall:

Anzahl der Teilchen bei $t = 0$:	N_0
Halbwertszeit:	$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$
Zerfallskonstante:	$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$
Einheit von λ:	$s^{-1} = Bq$ Becquerel
Zerfallsgesetz:	$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
Aktivität:	Zerfälle pro Zeiteinheit
Aktivität bei $t = 0$:	$A_0 = \lambda N_0$,
Aktivität zum Zeitpkt. t:	$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$

Zeiteinheiten:

Jahr $= a$, Tag $= d$, Stunde $= h$, Minute $= min$, Sekunde $= s$

$1\,a = 365,25\,d \quad 1\,d = 24\,h \quad 1\,h = 60\,min \quad 1\,min = 60\,s$

Beispiel

Das Radium-Isotop $^{224}_{88}Ra$ hat eine Halbwertzeit von $T_{1/2} = 3,64\,d$ (Tagen/Days). Das heißt, nach dem Zeitraum $T_{1/2}$ hat sich eine gegebene Menge Radium halbiert.

Wann sind nur noch 1% der Ausgangsmenge vorhanden?

$$\begin{aligned}
N(t_{1\%}) &= N_0 \cdot 1\% = N_0 \cdot \frac{1}{100} = N_0 \cdot 0,01 \\
N(t_{1\%}) &= N_0 e^{-\lambda t_{1\%}} \\
\Rightarrow \quad 0,01 &= e^{-\lambda t_{1\%}} \\
\ln 0,01 &= -\lambda t_{1\%} \\
t_{1\%} &= -\frac{\ln 0,01}{\lambda} = -\frac{\ln 0,01 \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \\
&= -\frac{\ln 0,01 \cdot 3,64\,d}{\ln 2} = 24,18\,d
\end{aligned}$$

□

Allgemein: Nach

$$t_{x\%} = -\frac{\ln \frac{x}{100}}{\lambda} = -\frac{\ln \frac{x}{100} \cdot T_{1/2}}{\ln 2}$$

sind noch $x\%$ des Radioaktiven Stoffes vorhanden.

$C14$-Methode zur Altersbestimmung

Die Halbwertszeit von $C14$ ($= {}^{14}C$) beträgt 5730 Jahre. Ein frisches Stück Holz zeigt 15 Zerfälle pro Minute und Gramm $C14$.

Beispiel:
(vgl. Aufgabenblatt 21, 3) Bei einem antiken Holzgegenstand wurden 9 Zerfälle pro Minute und Gramm $C14$ gemessen.

a) Bestimme die Zerfallskonstante von $C14$. $\lambda = \frac{\ln 2}{5730\,a} = 1,21 \cdot 10^{-4}\,a^{-1}$

b) Was ist die Aktivität A_0 von $C14$? $A_0 = 15\,min^{-1}$

c) Was ist die Aktivität heute $A(t_\delta)$?

$$A(t_\delta) = 9\,min^{-1}$$

d) Stelle die Aktivitätsgleichung für 1 Gramm $C14$ auf.

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} = 15 \cdot e^{-1,21 \cdot 10^{-4} t\, a^{-1}}\, min^{-1}$$

e) Berechne das Alter der Probe.

$$\begin{aligned} A(t_\delta) &= 9\,min^{-1} = 15 \cdot e^{-1,21 \cdot 10^{-4} t_\delta\, a^{-1}}\, min^{-1} \\ \frac{9}{15} &= e^{-1,21 \cdot 10^{-4} t_\delta\, a^{-1}} \\ \ln \frac{9}{15} &= -1,21 \cdot 10^{-4} t_\delta\, a^{-1} \\ t_\delta &= -\frac{\ln \frac{9}{15} \cdot 10^4}{1,21}\, a = 4,22 \cdot 10^3\, a = 4220\, a \end{aligned}$$

□

Aufgabenblatt 21

Aufgabe 1:
Das natürlich vorkommende Radium-Isotop $^{224}_{88}Ra$ hat eine Halbwertzeit von $T_{1/2} = 3,64\,d$. Wann sind nur noch 1% der Ausgangsmenge vorhanden?

Aufgabe 2:
Berechne die Zerfallskonstante λ in $Bq = s^{-1}$.

Isotop		Halbwertszeit $T_{1/2}$	λ
$^{235}_{92}U$	Uran	$7,04 \cdot 10^8\,a$	
$^{231}_{90}Th$	Thorium	$25,6\,h$	
$^{231}_{91}Pa$	Protaktinium	$3,25 \cdot 10^4\,a$	
$^{219}_{86}Rn$	Radon	$3,96\,s$	
$^{224}_{88}Ra$	Radium	$3,64\,d$	
$^{228}_{90}Th$		$1,913\,a$	

Für die folgenden 4 Aufgaben benutze die Werte der Tabelle aus Aufgabe 2.

Aufgabe 3:

a) Wieviele Atome $^{235}_{92}U$ sind in einer Probe der Aktivität $A = A_0 = 312 \cdot 10^5\,Bq$ enthalten?
b) Berechne die Stoffmenge $n(^{235}_{92}U)$
c) Berechne die Masse $m(^{235}_{92}U)$
d) Nach welcher Zeitspanne t_0 sind 20% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 4:

a) Wieviele Atome $^{231}_{90}Th$ sind in einer Probe der Aktivität $A = A_0 = 135,4 \cdot 10^{17}\,Bq$ enthalten?
b) Berechne die Stoffmenge $n(^{231}_{90}Th)$
c) Berechne die Masse $m(^{231}_{90}Th)$
d) Nach welcher Zeitspanne t_0 sind noch 80% der Ausgangsmenge vorhanden?

Aufgabe 5:

a) Wieviele Atome $^{231}_{91}Pa$ sind in einer Probe der Aktivität $A = A_0 = 4,05\,Bq$ enthalten?
b) Berechne die Stoffmenge $n(^{231}_{91}Pa)$
c) Berechne die Masse $m(^{231}_{91}Pa)$
d) Nach welcher Zeitspanne t_0 sind 10% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabe 6:

a) Wieviele Atome $^{219}_{86}Rn$ sind in einer Probe der Aktivität $A = A_0 = 87,5 \cdot 10^{22}\,Bq$ enthalten?
b) Berechne die Stoffmenge $n(^{219}_{86}Rn)$
c) Berechne die Masse $m(^{219}_{86}Rn)$
d) Nach welcher Zeitspanne t_0 sind 20% der Ausgangsmenge zerfallen?

Aufgabenblatt 22

Aufgabe 1:
Berechne die Halbwertszeit $T_{1/2}$.

Isotop	Name	λ	Halbwertszeit $T_{1/2}$
${}^{232}_{90}Th$	Thorium	$1,56 \cdot 10^{-18}\,Bq$	
${}^{234}_{90}Th$		$3,33 \cdot 10^{-7}\,Bq$	
${}^{234}_{91}Pa$	Protaktinium	$2,85 \cdot 10^{-5}\,Bq$	
${}^{226}_{88}Ra$	Radium	$1,37 \cdot 10^{-11}\,Bq$	
${}^{223}_{88}Ra$		$7,02 \cdot 10^{-7}\,Bq$	
${}^{212}_{82}Pb$	Blei	$1,81 \cdot 10^{-5}\,Bq$	

Aufgabe 2:
Ein Mol eines radioaktiven Stoffes der Halbwertszeit $5,27\,a$ ist gegeben.

a) Berechne die Zerfallskonstante.

b) Bestimme N_0

c) Stelle die Zerfallsgleichung auf.

d) Welche Masse ist nach 1 Jahr noch vorhanden?

e) Wieviel Prozent der Masse ist nach 2 Jahren noch vorhanden?

Aufgabenblatt 23

$C14$-Methode zur Altersbestimmung
Die Halbwertszeit von $C14$ ($= {}^{14}C$) beträgt 5730 Jahre. Ein frisches Stück Holz zeigt 15 Zerfälle pro Minute und Gramm $C14$.

Aufgabe 1:
Bei einem antiken Holzgegenstand wurden 9 Zerfälle pro Minute und Gramm $C14$ gemessen.

a) Bestimme die Zerfallskonstante von $C14$.
b) Was ist die Aktivität A_0 von $C14$?
c) Was ist die Aktivität heute $A(t_\delta)$?
d) Stelle die Aktivitätsgleichung für 1 Gramm $C14$ auf.
e) Berechne das Alter der Probe.

Aufgabe 2:
Holz aus dem Grab des Pharao Sneferu zeigte 7,5 Zerfälle pro Minute und Gramm $C14$. Wann wurde das Holz geschlagen?

E-mail address: `christina@birkenhake.net`
URL: `http://christina.birkenhake.net`